CONECTIVOS EN LOS TOPOS DE PREHACES

GERMÁN ANDRÉS GALEANO ORTIZ

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
2017

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: CONECTIVOS EN LOS TOPOS DE PREHACES

AUTORES: GERMÁN ANDRÉS GALEANO ORTIZ código (070200192007)

DIRECTOR: ANTON ARNOLD OOSTRA VANNOPEN

JURADOS: LEONARDO SOLANILLA
JESÚS ANTONIO ÁVILA

CALIFICACIÓN: 4.8 (cuatro-ocho)

X APROBÓ ___ REPROBÓ

OBSERVACIONES: Meritorio

FIRMAS

Leonardo Solanilla Ch.
LEONARDO SOLANILLA
Jurado 1

Jesús Antonio Ávila G.
JESÚS ANTONIO ÁVILA
Jurado 2

Arnold Oostra
ANTON ARNOLD OOSTRA VANNOPEN
Director del Trabajo

YURI MARCELA GARCÍA S.
Directora del Programa

Ciudad y fecha: Ibagué, 20 de diciembre de 2017

FORMULARIO PARA EVALUACIÓN DE TRABAJOS DE GRADO HOJA No. 2

6. Calificación

PRIMER JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: LEONARDO SOLANILLA

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 4.8 (cuatro-ocho)

FIRMA DEL JURADO Leonardo Solanilla Ch.

SEGUNDO JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: JESÚS ANTONIO ÁVILA

NOTA OTORGADA POR EL JURADO Cuatro-Ocho (4.8)

FIRMA DEL JURADO Jesus Antonio Avila O.

PROMEDIO FINAL DE LA NOTA DEL TRABAJO DE GRADO: Cuatro-Ocho (4.8)

7. RANGOS DE EQUIVALENCIA: (Acuerdo No. 030 de 2000 del Consejo de Facultad)

Calificación menor de tres cero (3.0)	REPROBADO
Calificación entre tres cero (3.0) y tres nueve (3.9)	APROBADO
Calificación entre cuatro cero (4.0) y cuatro cuatro (4.4.)	SOBRESALIENTE
Calificación entre cuatro cinco (4.5) y cuatro nueve (4.9)	MERITORIO
Calificación de cinco cero (5.0)	LAUREADO

FECHA DE SUSTENTACIÓN Dic. 20/2017

CONECTIVOS EN LOS TOPOS DE PREHACES

GERMÁN ANDRÉS GALEANO ORTIZ
Código 0702-00192007

Trabajo de grado para optar al título de
Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística

Director
ARNOLD OOSTRA
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
2017

Dedicatoria

A mis padres

Germán Galeano Lozano

Martha Cecilia Ortiz

A mis hermanos

Erika Mayerli Rodríguez Ortiz

Daniel Ricardo Galeano Ortiz

A mis sobrinas

Paula Alexandra Calderón Rodríguez

Luciana Cleves Rodríguez

Especialmente a mi esposa e hija

Paula Andrea Leal Varón

Abby Gabriela Galeano Leal

Agradecimientos

Principalmente a la vida, la naturaleza y toda clase de supremacía que se alineo y tomo la decisión de que viviera esta historia. Gracias por darme esos seres maravillosos papá y mamá, hermanos y demás familia. Gracias por pertenecer y sentirme orgulloso de mi tierra "Tolima". Gracias por la oportunidad de estudiar a nivel profesional donde conocí a todos los compañeros y profesores que nutrieron esta travesía. Gracias al profesor Arnold por su tiempo, espacio y dedicación para la culminación de este trabajo, además por todo su ejemplo y respeto que inspira. Gracias por darme la mejor experiencia del mundo al conformar una familia con dos hermosas y tiernas mujeres Paula y Abby, espero que pronto se les de la mejor experiencia del mundo al convivir con dos Hombres Germán y el hermanito.

Tabla de Contenido

Introducción

La teoría de topos fue desarrollada durante la segunda mitad del siglo XX. Esa teoría surgió en dos líneas separadas, tales fueron la teoría de haces y la teoría de categorías, y brevemente se constituyó en un entorno adecuado para la lógica intuicionista, la cual había surgido con los trabajos de Brouwer en las primeras décadas del siglo XX y considerada como alternativa crítica de la lógica clásica y de los fundamentos de las matemáticas que predominan actualmente. Los topos, también llamados topos elementales, permiten generalizar cierta clase de fenómenos matemáticos a universos más abstractos y pueden verse como una generalización de la categoría ***Con*** de los conjuntos. Por ello el contexto de los topos puede pensarse como cierto ambiente generalizado para la lógica [4].

La teoría de haces fue inicialmente establecida como una herramienta de la Topología algebraica. Posee un marco conceptual general además de un lenguaje propio y sus orígenes se remontan al siglo XIX, aunque la noción moderna de haz fue establecida en 1945 por Jean Leray y desarrollada en los años siguientes por Henri Cartan. Se puede ver un haz como un espacio localmente homeomorfo al espacio base. Pero con el lenguaje de la teoría de categorías, en el ambiente de esta teoría se establecen universos alternos cada uno de los cuales permite hacer una matemática diferente que ilumina y enriquece la clásica [7].

La teoría de categorías surgió a partir de los trabajos de Eilenberg y MacLane al formular los diagramas conmutativos en un artículo de Topología algebraica [6, 8]. En la década de 1960 tomó fuerza gracias a la influencia gigantesca ejercida por Lawvere, padre y promotor de la teoría de topos, al axiomatizar la categoría de los conjuntos. Esta teoría permite que muchas de las propiedades de las matemáticas sean unificadas y simplificadas en una presentación con flechas, además se estableció como un nuevo sistema para expresar las matemáticas, por ello se planteó el cambio del lenguaje usual interno por un lenguaje externo el cual permitiera verlas de manera sintética.

La lógica clásica se caracteriza por principios como la ley de la doble negación y la del tercero excluido, que se pueden expresar a nivel proposicional mediante los conectivos. Además en esta lógica cualquier conectivo puede expresarse como combinación de los conectivos usuales. Pero existen otras lógicas, como la intuicionista, donde estos resultados ya no se tienen.

Una forma algebraica de visualizar estos hechos es provista por la teoría de topos, en cuya lógica en general no valen los principios mencionados y en los cuales existen ejemplos de conectivos que no pueden obtenerse como combinación de los usuales. Eso sucede incluso en los topos más sencillos, conocidos como topos de prehaces.

En este contexto categórico se da desarrollo a todo el trabajo. El primer capítulo introduce los conceptos categóricos básicos utilizados en los capítulos posteriores, estos conceptos presentados son bien conocidos en la literatura matemática. El segundo capítulo se centra sobre los prehaces, los cuales son percibidos como un sistema de representaciones de una categoría pequeña (una categoría es pequeña si la colección de todos sus objetos y morfismos es un conjunto). Los prehaces representables conforman un ejemplo importante del concepto en mención. En este capítulo se muestra más detalladamente la construcción del topos de prehaces [10], ya que a cada una de las afirmaciones se describe su demostración de una manera más asequible. Además, se estudia el Lema de Yoneda, el cual es muy importante para la definición de los conectivos lógicos en los topos de prehaces. Un conectivo binario suele identificarse con las funciones de $\{V, F\} \times \{V, F\}$ en $\{V, F\}$, los cuales normalmente se definen mediante una tabla de verdad. El tercer capítulo busca a partir de esta definición establecer el conjunto $\{V, F\}$ como el objeto de valores de verdad de la categoría de conjuntos, objeto conocido ahora como clasificador de subobjetos, además se establece que en un topos elemental, los conectivos pueden definirse de manera muy precisa por medio de morfismos en el clasificador.

Capítulo 1

Nociones básicas de teoría de categorías

1.1. Categorías

Una categoría puede ser pensada en primer lugar como un universo para un tipo particular del discurso matemático. Tal universo está específicamente determinado por cierta clase de objetos y morfismos entre diferentes objetos. Estos objetos y morfismos pueden tomar una forma particular en determinados contextos del ambiente matemático.

Definición 1.1 (***Categoría***)**.** Una *categoría* $\boldsymbol{C}$ consta de

1. Una colección de $\boldsymbol{C}$-*objetos* denotados $a, b, c, \ldots$

2. Una colección de $\boldsymbol{C}$-*morfismos* entre cada par de objetos denotados $f, g, h, \ldots$

   Cada $\boldsymbol{C}$-morfismo f tiene asignado dos $\boldsymbol{C}$-objetos llamadas dominio y codominio, denotados $dom f$ y $cod f$ respectivamente. Si $a = domf$ y $b = codf$ son $\boldsymbol{C}$-objetos, entonces el $\boldsymbol{C}$-morfismo se representa como $f : a \longrightarrow b$ o $a \xrightarrow{f} b$.

3. Una operación parcial de composición $\circ$, definida para cada par de $\boldsymbol{C}$-morfismos f y g, con $domg = codf$, a los que se asigna un $\boldsymbol{C}$-morfismo $g \circ f$, llamado *composición* de f y g, $g \circ f : domf \longrightarrow codg$ tal que, cumpla las siguientes condiciones:

Propiedad asociativa: dados los $\boldsymbol{C}$-objetos a, b, c y d, los $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ y $h : c \longrightarrow d$, entonces se tiene que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, es decir, los diagramas que tengan la siguiente forma siempre conmutan.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right=2, "h\circ(g\circ f)"'] \arrow[d, shift left=1, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[dr, "g\circ f"] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h\circ g"'] \\
d & c \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

Propiedad de identidad: A cada $\boldsymbol{C}$-objeto b se asigna un $\boldsymbol{C}$-morfismo $1_b : b \longrightarrow b$, llamado el *morfismo identidad*, tal que dados los $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : a \longrightarrow b$ y $g : b \longrightarrow c$, $1_b \circ f = f$ y $g \circ 1_b = g$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
& b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

A continuación se presentan algunos ejemplos de categorías.

Ejemplo 1.2 (***Con***)**.** La categoría de conjuntos tiene como objetos los conjuntos, los morfismos las funciones, y la composición es la usual entre funciones.

Ejemplo 1.3 (***Grp***)**.** La categoría de grupos tiene como objetos los grupos, los morfismos los homomorfismos entre grupos, y la composición es la usual entre funciones.

Ejemplo 1.4 (***Top***)**.** La categoría de espacios topológicos tiene como objetos los espacios topológicos, los morfismos las funciones continuas entre espacios, y la composición es la usual entre funciones.

En cada uno de estos ejemplos los objetos son conjuntos con alguna estructura adicional excepto los objetos de la categoría de conjuntos. Los morfismos son las funciones que en cada caso apropiado satisfacen las condiciones relacionadas a cada estructura.

Ejemplo 1.5 ($\boldsymbol{P} = (P, \leq)$)**.** El conjunto ordenado $(P, \leq)$ es una categoría que tiene como objetos los elementos de P, los morfismos están dados por la relación binaria, es decir, existe un morfismo $f : a \longrightarrow b$ si y solo si $a \leq b$. La composición está dada por la transitividad y el morfismo identidad por la reflexividad.

Ejemplo 1.6 ($\boldsymbol{Ab}(X)$)**.** Como un caso especial del anterior, la categoría de abiertos sobre un espacio topologico X tiene como objetos los abiertos de X, los morfismos están dados por las inclusiones entre subconjuntos, es decir, existe un morfismo $U \longrightarrow V$ si y solo si $U \subseteq V$.

Ejemplo 1.7 (***Categoría morfismo***)**.** Dada una categoría $\boldsymbol{C}$, la *categoría morfismo* $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$ tiene como objetos los $\boldsymbol{C}$-morfismos. Tiene como morfismo desde el objeto $f : a \longrightarrow b$ al objeto $g : c \longrightarrow d$, un par de $\boldsymbol{C}$-morfismos (h, k) tal que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd}$$

Es decir, dados los $\boldsymbol{C}$-morfismos $h : a \longrightarrow c$ y $k : b \longrightarrow d$, entonces $g \circ h = k \circ f$. La composición de los morfismos (h, k) y (i, j), se define como:

$$(i, j) \circ (h, k) = (i \circ h, j \circ k)$$

ya que el morfismo (i, j) tiene como objetos $g : c \longrightarrow d$ y $m : e \longrightarrow l$, luego

$$m \circ (i \circ h) = (j \circ k) \circ f.$$

Por lo tanto $(i \circ h, j \circ k)$ es un $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$-morfismo.

Para cada objeto $g : c \longrightarrow d$, se asigna el morfismo identidad $(1_c, 1_d)$ tal que, para todo morfismo (i, j) y (h, k), se tiene que

$$\begin{aligned} (1_c, 1_d) \circ (h, k) &= (1_c \circ h, 1_d \circ k) \quad \text{y} \quad & (i, j) \circ (1_c, 1_d) &= (i \circ 1_c, j \circ 1_d) \\ &= (h, k) & &= (i, j) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8 (***Categoría coma***)**.** Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría y a un $\boldsymbol{C}$-objeto, entonces la *categoría coma* denotada $\boldsymbol{C} \downarrow a$ tiene como objetos los $\boldsymbol{C}$-morfismos con codominio a. Como morfismos los $\boldsymbol{C}$-morfismos tal que para los objetos $f : b \longrightarrow a$ y $g : c \longrightarrow a$ se tiene un morfismo $k : b \longrightarrow c$ que cumple $g \circ k = f$.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"'] & & c \arrow[dl, "g"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

La composición entre los morfismos k y j está definida como la composición en $\boldsymbol{C}$, es decir, $j \circ k : b \longrightarrow d$ ya que, dado el morfismo $k : b \longrightarrow c$ con objetos $f : b \longrightarrow a$ y $g : c \longrightarrow a$, se tiene que $g \circ k = f$. Ahora, dado el morfismo $j : c \longrightarrow d$ con objetos $g : c \longrightarrow a$ y $h : d \longrightarrow a$, se tiene que $h \circ j = g$. Luego, $(h \circ j) \circ k = g \circ k = f$ y por asociatividad en $\boldsymbol{C}$, se tiene que $h \circ (j \circ k) = f$. Por lo tanto $j \circ k : b \longrightarrow d$ es un morfismo.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "f"'] & c \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & d \arrow[dl, "h"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

La propiedad asociativa en $\boldsymbol{C} \downarrow a$ se deduce de la propiedad asociativa en $\boldsymbol{C}$ ya que, dados los morfismos k, j y m, $m \circ (j \circ k) = (m \circ j) \circ k$. Para cada objeto $g : c \longrightarrow a$, se asigna el morfismo identidad $1_c : c \longrightarrow c$ tal que, $g \circ 1_c = g$. Luego, para todo morfismo k y j se tiene que $1_c \circ k = k$ y $j \circ 1_c = j$ ya que $g \circ (1_c \circ k) = f$ y $h \circ (j \circ 1_c) = g$.

Ejemplo 1.9 (***Categoría dual u opuesta***)**.** Dada una categoría $\boldsymbol{C}$ se puede formar una nueva categoría $\boldsymbol{C}^{op}$, llamada la *categoría opuesta* o *dual* de $\boldsymbol{C}$, la cual toma los $\boldsymbol{C}$-objetos pero reversa la dirección de todos los $\boldsymbol{C}$-morfismos y todas las composiciones, es decir, para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$, se introduce un $\boldsymbol{C}^{op}$-morfismo $f^{op} : b \longrightarrow a$. La composición $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$ en $\boldsymbol{C}^{op}$, está definida exactamente cuando la composición $g \circ f$ está definida en $\boldsymbol{C}$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[l, bend left, "f^{op}"] \arrow[r, "g"] & c \arrow[l, bend left, "g^{op}"] \end{tikzcd}$$

La propiedad asociativa, está dada para los $\boldsymbol{C}$-objetos a, b, c y d, y los $\boldsymbol{C}^{op}$-morfismos $f^{op} : b \longrightarrow a$, $g^{op} : c \longrightarrow b$ y $h^{op} : d \longrightarrow c$, como:

$$
\begin{aligned}
f^{op} \circ (g^{op} \circ h^{op}) &= f^{op} \circ (h \circ g)^{op} \\
&= ((h \circ g) \circ f)^{op} \\
&= (h \circ (g \circ f))^{op} \\
&= (g \circ f)^{op} \circ h^{op} \\
&= (f^{op} \circ g^{op}) \circ h^{op}
\end{aligned}
$$

Para cada $\boldsymbol{C}$-objeto b se asigna el $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad $1_b : b \longrightarrow b$ tal que, para todo $\boldsymbol{C}^{op}$-morfismo $f^{op} : b \longrightarrow a$ y $g^{op} : c \longrightarrow b$, se tiene que $1_b \circ g^{op} = g^{op}$ y $f^{op} \circ 1_b = f^{op}$.

1.2. Morfismos y objetos especiales

Definición 1.10 (***Monomorfismo***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ es un *monomorfismo* si para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto c y cada par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $g, h : c \rightrightarrows a$, la igualdad $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.

La notación $f : a \rightarrowtail b$ es usada para indicar que f es un monomorfismo.

Afirmación 1.11. Si f y g son dos monomorfismos en $\boldsymbol{C}$, entonces $g \circ f$ es un monomorfismo.

Demostración. Dados los monomorfismos $f : a \rightarrowtail b$ y $g : b \rightarrowtail c$, para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto d y par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $h, j : d \rightrightarrows a$, la igualdad $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ j$ implica que por la propiedad asociativa $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ j)$, luego como g es un monomorfismo $f \circ h = f \circ j$ y como f también es un monomorfismo entonces $h = j$.

Por lo tanto $g \circ f$ es un monomorfismo. $\square$

Definición 1.12 (***Epimorfismo***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ es un *epimorfismo* si para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto c y cada par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $g, h : b \rightrightarrows c$, la igualdad $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$.

La notación $f : a \twoheadrightarrow b$ es usada para indicar que f es un epimorfismo.

Ejemplo 1.13. En la categoría ***Con*** los monomorfismos y epimorfismos corresponden a las funciones inyectivas y sobreyectivas respectivamente.

Definición 1.14 (***Isomorfismo***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$, es un *isomorfismo* si existe un $\boldsymbol{C}$-morfismo $g : b \longrightarrow a$ tal que $g \circ f = 1_a$ y $f \circ g = 1_b$.

El morfismo g se llama el *inverso* de f, por lo tanto se denota $g = f^{-1}$.

Afirmación 1.15. Todo isomorfismo siempre es un epimorfismo y un monomorfismo.

Demostración. Sea $f : a \longrightarrow b$ un isomorfismo en $\boldsymbol{C}$. Para cualquier par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $g, h : b \rightrightarrows c$, si $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = g \circ 1_b = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = (h \circ f) \circ f^{-1} = h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ 1_b = h$. Por lo tanto f es un epimorfismo.

De igual manera todo isomorfismo es un monomorfismo, la prueba es igual. □

Definición 1.16 (***Objetos isomorfos***)**.** Los $\boldsymbol{C}$-objetos a y b son *isomorfos*, denotados $a \cong b$, si existe un isomorfismo $f : a \longrightarrow b$ en $\boldsymbol{C}$.

Definición 1.17 (***Objeto inicial***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-objeto 0 es *inicial* si para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a, existe uno y solo un morfismo desde 0 hacia a. Este $\boldsymbol{C}$-morfismo se denota $0_a : 0 \longrightarrow a$.

Ejemplo 1.18. En la categoría ***Con*** el único objeto inicial es el conjunto vacío $\emptyset$.

Ejemplo 1.19. Objeto inicial para la categoría $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$.

Si 0 es el $\boldsymbol{C}$-objeto inicial de la categoría $\boldsymbol{C}$, entonces el objeto inicial para la categoría $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$ es el $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad $1_0 : 0 \longrightarrow 0$. El objeto inicial de $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$ se obtiene ya que, para cualquier objeto $f : a \longrightarrow b$ existe uno y solo un morfismo $(0_a, 0_b)$ con $0_a : 0 \longrightarrow a$ y $0_b : 0 \longrightarrow b$ los únicos $\boldsymbol{C}$-morfismos para los $\boldsymbol{C}$-objetos a y b, tal que $f \circ 0_a = 0_b \circ 1_0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_a"] \arrow[d, "1_0"'] & a \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r, "0_b"'] & b
\end{tikzcd}$$

Definición 1.20 (***Objeto terminal***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-objeto 1 es *terminal* si para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a, existe uno y solo un $\boldsymbol{C}$-morfismo desde a hacia 1. Este morfismo se denota $!_a : a \longrightarrow 1$.

Ejemplo 1.21. En la categoría ***Con*** cualquier conjunto unitario $\{*\}$ es objeto terminal.

Ejemplo 1.22. Objeto terminal para la categoría $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$.

Si 1 es el $\boldsymbol{C}$-objeto terminal de la categoría $\boldsymbol{C}$, entonces el objeto terminal para la categoría $\boldsymbol{C}^{\rightarrow}$ es el $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad $1_1 : 1 \longrightarrow 1$.

Afirmación 1.23. Si $f : 1 \longrightarrow a$ tiene como dominio un $\boldsymbol{C}$-objeto terminal entonces f es un monomorfismo.

Demostración. Si $f : 1 \longrightarrow a$ es un $\boldsymbol{C}$-morfismo, entonces para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto c y par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $g, h : c \rightrightarrows 1$ tales que $f \circ g = f \circ h$ se tiene $g =!_c$ y $h =!_c$. Pues 1 es un $\boldsymbol{C}$-objeto terminal y por definición existe uno y solo un $\boldsymbol{C}$-morfismo desde cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto hacia 1. Esto implica que $g = h$. Por lo tanto, f es un monomorfismo. □

1.3. Límites y colímites

Algunas construcciones comunes en las categorías reciben el nombre de límites.

Definición 1.24 (***Producto***)**.** Un *producto* de los $\boldsymbol{C}$-objetos a y b es un $\boldsymbol{C}$-objeto $a \times b$ junto con un par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $p_a : a \times b \longrightarrow a$ y $p_b : a \times b \longrightarrow b$ tal que, para cualquier par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : c \longrightarrow a$ y $g : c \longrightarrow b$ existe exactamente un $\boldsymbol{C}$-morfismo $\langle f, g \rangle : c \longrightarrow a \times b$ que satisface las siguientes igualdades: $p_a \circ \langle f, g \rangle = f$ y $p_b \circ \langle f, g \rangle = g$.

$\langle f, g \rangle$ es el $\boldsymbol{C}$-morfismo *producto* de f y g con respecto a las *proyecciones* p_a y p_b.

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f, g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}
$$

Afirmación 1.25. Si $\langle f, g \rangle = \langle k, h \rangle$, entonces $f = k$ y $g = h$.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b \\
& c \arrow[ul, "k"] \arrow[u, "\langle k,h\rangle"'] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Dados los $\boldsymbol{C}$-morfismos producto $\langle f, g\rangle$ y $\langle k, h\rangle$, por definición se tiene $f = p_a \circ \langle f, g\rangle$ y $g = p_b \circ \langle f, g\rangle$ y, de la misma manera, $k = p_a \circ \langle k, h\rangle$ y $h = p_b \circ \langle k, h\rangle$. Luego por la igualdad $\langle f, g\rangle = \langle k, h\rangle$ se tiene $f = k$ y $g = h$. $\square$

Definición 1.26 (***Coproducto***)**.** Un *coproducto* de los $\boldsymbol{C}$-objetos a y b es un $\boldsymbol{C}$-objeto $a + b$ junto con un par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $i_a : a \longrightarrow a + b$ y $i_b : b \longrightarrow a + b$ tal que, para cualquier par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : a \longrightarrow c$ y $g : b \longrightarrow c$ existe exactamente un $\boldsymbol{C}$-morfismo $[f, g] : a + b \longrightarrow c$ que satisface las siguientes igualdades: $[f, g] \circ i_a = f$ y $[f, g] \circ i_b = g$.

$[f, g]$ es el $\boldsymbol{C}$-morfismo *coproducto* de f y g con respecto a las *inyecciones* i_a y i_b.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[dr, "f"'] & a + b \arrow[d, "{[f,g]}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[dl, "g"] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.27. En ***Con*** el producto corresponde al producto cartesiano y el coproducto a la unión disyunta.

Ejemplo 1.28. En un conjunto ordenado $\boldsymbol{P}$ como categoría, el producto de dos objetos es el ínfimo entre estos y el coproducto corresponde al supremo.

Definición 1.29 (***Igualador***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-morfismo $i : e \longrightarrow a$ es un *igualador* de un par de $\boldsymbol{C}$-morfismos paralelos $f : a \longrightarrow b$ y $g : a \longrightarrow b$ si:

1. $f \circ i = g \circ i$;

2. Dado un $\boldsymbol{C}$-morfismo $h : c \longrightarrow a$ tal que $f \circ h = g \circ h$, existe un único $\boldsymbol{C}$-morfismo $k : c \longrightarrow e$ tal que $i \circ k = h$.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
c \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.30 (***Coigualador***)**.** Un $\boldsymbol{C}$-morfismo $q : b \longrightarrow e$ es un *coigualador* de un par de $\boldsymbol{C}$-morfismos paralelos $f : a \longrightarrow b$ y $g : a \longrightarrow b$ si:

1. $q \circ f = q \circ g$;
2. Dado un $\boldsymbol{C}$-morfismo $h : b \longrightarrow c$ tal que $h \circ f = h \circ g$, existe un único $\boldsymbol{C}$-morfismo $k : e \longrightarrow c$ tal que $k \circ q = h$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, "k"] \\
 & & c
\end{tikzcd}$$

Definición 1.31 (***Categoría finitamente completa***)**.** Una categoría se dice que es *finitamente completa* si es una categoría con objeto terminal, con productos y con igualadores.

Definición 1.32 (***Diagrama***)**.** Un *diagrama* A, para una categoría $\boldsymbol{C}$, consiste en una colección de $\boldsymbol{C}$-objetos $a_1, a_2, a_3 \ldots$ junto con una colección, posiblemente vacía, de $\boldsymbol{C}$-morfismos $g : a_i \longrightarrow a_j$ entre ellos.

Es decir, entre ciertos objetos de un diagrama pueden o no existir morfismos.

Definición 1.33 (***Cono***)**.** Un *cono* para el diagrama A consiste de un objeto c y de un $\boldsymbol{C}$-morfismo $f_i : c \longrightarrow a_i$, para cada objeto a_i en A, tal que además $g \circ f_i = f_j$ siempre que g sea un morfismo en el diagrama A.

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[rr, "g"] & & a_j \\
 & c \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

El cono para el diagrama A, se denota como $\{f_i : c \longrightarrow a_i\}$.

Definición 1.34 (***Límite***)**.** Un *límite* para un diagrama A, es un cono $\{f_i : c \longrightarrow a_i\}$ con la propiedad que, para cualquier otro cono $\{f'_i : c' \longrightarrow a_i\}$, existe exactamente un morfismo $f : c' \longrightarrow c$ tal que $f_i \circ f = f'_i$ para cualquier objeto a_i en A.

$$\begin{tikzcd} & a_i & \\ c' \arrow[ur, "f'_i"] \arrow[rr, "f"'] & & c \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

La anterior propiedad describe que, dada la existencia del otro cono, el cono límite es el "más cercano" al diagrama. Se dice que el límite tiene la *propiedad universal* con respecto a los conos para el diagrama A.

Ejemplo 1.35. Sea A el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

Un cono para A es un par de morfismos $h : c \longrightarrow a$ y $i : c \longrightarrow b$ con $i = f \circ h$ y $i = g \circ h$, es decir, para este caso un cono para A es un morfismo h tal que $f \circ h = g \circ h$. Un límite para A es el anterior cono con la propiedad que para cualquier otro cono $h' : c' \longrightarrow a$ existe un único morfismo $y : c' \longrightarrow c$ tal que $h \circ y = h'$. Por lo tanto, se puede decir que el límite para A es un igualador de f y g, o en otras palabras, que el igualador es un límite particular.

Ejemplo 1.36. Sea A el diagrama vacío.

Es decir, el diagrama no tiene objetos y de igual manera no tiene morfismos. Un cono para A es un objeto c de $\boldsymbol{C}$, un límite para A es entonces un objeto c tal que, para cualquier otro cono c', existe exactamente un morfismo $f : c' \longrightarrow c$. Por lo tanto se puede decir que, un límite para el diagrama vacío es un objeto terminal de $\boldsymbol{C}$.

Nota 1.37. Se puede demostrar que una categoría es finitamente completa si y solo si en ella todos los diagramas finitos tienen un límite, o en otras palabras, si en ella existen todos los límites finitos.

Definición 1.38 (***Co-cono***)**.** Un *co-cono* $\{f_i : a_i \longrightarrow c\}$ para un diagrama A consiste de un objeto c y de un morfismo $f_i : a_i \longrightarrow c$ para cada objeto a_i en A, que satisface $f_j \circ g = f_i$ para cada morfismo $g : a_i \longrightarrow a_j$ en A.

Definición 1.39 (***Colímite***)**.** Un *colímite* para un diagrama A es un co-cono $\{f_i : a_i \longrightarrow c\}$ con la propiedad couniversal que para cualquier co-cono $\{f_i' : a_i \longrightarrow c'\}$ existe exactamente un morfismo $f : c \longrightarrow c'$ tal que $f \circ f_i = f_i'$ para cualquier objeto a_i en A.

$$\begin{tikzcd} & a_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_i'"] & \\ c \arrow[rr, "f"'] & & c' \end{tikzcd}$$

Definición 1.40 (***Pullback***)**.** Un *pullback* de un par de morfismos $f : a \longrightarrow c$ y $g : b \longrightarrow c$ con codominio común es un límite en $\boldsymbol{C}$ para el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

Un cono para este diagrama es un par de morfismos $f' : d \longrightarrow b$ y $g' : d \longrightarrow a$ tal que el siguiente cuadro conmuta, es decir, $f \circ g' = g \circ f'$.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

Así tenemos, por la propiedad universal de los límites, que un pullback de un par de morfismos $f : a \longrightarrow c$ y $g : b \longrightarrow c$ es un par $f' : d \longrightarrow b$ y $g' : d \longrightarrow a$ de morfismos tal que:

1. $f \circ g' = g \circ f'$;

2. Dado el par de morfismos $h : e \longrightarrow a$ y $j : e \longrightarrow b$ tal que $f \circ h = g \circ j$, entonces

existe un único morfismo $k : e \longrightarrow d$ tal que $h = g' \circ k$ y $j = f' \circ k$.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.41. En ***Con*** el pullback para dos funciones $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow C$ está determinado por el conjunto

$$A \underset{C}{\times} B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$$

con funciones p_A y p_B como las proyecciones, es decir, $p_A(a, b) = a$ y $p_B(a, b) = b$.

En efecto:

1. $fp_A = gp_B$, ya que $fp_A(a, b) = f(a)$ y $gp_B(a, b) = g(b)$ y como $(a, b) \in A \underset{C}{\times} B$ se tiene $f(a) = g(b)$.

2. Dadas las funciones $\beta : D \longrightarrow B$ y $\alpha : D \longrightarrow A$ con $f\alpha = g\beta$, entonces se define la función $\gamma : D \longrightarrow A \underset{C}{\times} B$ para cualquier $d \in D$ como $\gamma(d) = (\alpha(d), \beta(d))$. El elemento $\gamma(d)$ pertenece a $A \underset{C}{\times} B$ porque $f(\alpha(d)) = g(\beta(d))$. Además $p_A\gamma = \alpha$ y $p_B\gamma = \beta$, ya que:

$$\begin{aligned} p_A\gamma(d) &= p_A(\alpha(d), \beta(d)) \\ &= \alpha(d) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} p_B\gamma(d) &= p_B(\alpha(d), \beta(d)) \\ &= \beta(d) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] & & \\
& A \underset{C}{\times} B \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Afirmación 1.42. Supóngase que el diagrama siguiente es un pullback.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

Si f es un monomorfismo entonces f' también es un monomorfismo.

Demostración. Sean $h, k : e \longrightarrow d$ morfismos tales que $f' \circ h = f' \circ k$. En tales condiciones

$$f \circ (g' \circ h) = (f \circ g') \circ h = (g \circ f') \circ h = g \circ (f' \circ h) = g \circ (f' \circ k) = (g \circ f') \circ k = (f \circ g') \circ k = f \circ (g' \circ k)$$

y, al ser f un monomorfismo, resulta $g' \circ h = g' \circ k$ y se obtiene el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd} e \arrow[dr, shift left, "k"] \arrow[dr, shift right, "h"'] \arrow[drr, bend left, "f' \circ h = f' \circ k"] \arrow[ddr, bend right, "g' \circ h = g' \circ k"'] & & \\ & d \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

Puesto que el cuadrado es un pullback, por la propiedad universal se concluye $h = k$ y así f' es un monomorfismo. $\square$

Definición 1.43 (*Pushout*). Un *pushout* de un par $f : a \longrightarrow b$ y $g : a \longrightarrow c$ de morfismos con dominio común, es un colímite para el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & c \\ b & \end{tikzcd}$$

1.4. Funtores

Los "homomorfismos" entre categorías reciben el nombre de funtores.

Definición 1.44 (***Funtor covariante***)**.** Un *funtor* (covariante) F desde una categoría $\boldsymbol{C}$ a otra categoría $\boldsymbol{D}$ es una función que asigna:

1. A cada $\boldsymbol{C}$-objeto a un $\boldsymbol{D}$-objeto $F(a)$;
2. A cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ un $\boldsymbol{D}$-morfismo $F(f) : F(a) \longrightarrow F(b)$ tal que:
   a) $F(1_a) = 1_{F(a)}$ para todos los objetos, es decir, al $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad en el $\boldsymbol{C}$-objeto a asigna la identidad en el $\boldsymbol{D}$-objeto $F(a)$;
   b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ siempre que $g \circ f$ esté definida en $\boldsymbol{C}$, es decir, F respeta la composición.

La notación $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es usada para indicar que F es un funtor desde $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{D}$. Entonces un funtor es una transformación que preserva *dom*, *cod*, identidad y composición.

Ejemplo 1.45 (***Funtor identidad***)**.** En cualquier categoría $\boldsymbol{C}$, el *funtor identidad* $1_{\boldsymbol{C}} : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ es aquel, que tiene $1_{\boldsymbol{C}}(a) = a$ y $1_{\boldsymbol{C}}(f) = f$. Pues $1_{\boldsymbol{C}}(1_a) = 1_a = 1_{1_{\boldsymbol{C}}(a)}$ y $1_{\boldsymbol{C}}(g \circ f) = g \circ f = 1_{\boldsymbol{C}}(g) \circ 1_{\boldsymbol{C}}(f)$.

Ejemplo 1.46 (***Funtor partes***)**.** Sea $P : \boldsymbol{Con} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ la función que asigna a cada conjunto A el conjunto de partes $P(A)$, y a cada función $f : A \longrightarrow B$ la función $P(f) : P(A) \longrightarrow P(B)$ que asigna a cada $X \subseteq A$ la imagen $P(f)(X) = f(X) \subseteq B$. Para la función identidad $id_A : A \longrightarrow A$, la función $P(id_A) : P(A) \longrightarrow P(A)$ asigna a cada $X \subseteq A$ la imagen $P(id_A)(X) = id_A(X) = X \subseteq A$, por lo tanto $P(1_A) = id_{P(A)}$. Para la composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ para alguna función $g : B \longrightarrow C$, $P(g \circ f) : P(A) \longrightarrow P(C)$ asigna a cada $X \subseteq A$ la imagen $g(f(X)) \subseteq C$, así que

$$\begin{aligned} P(g \circ f)(X) &= (g \circ f)(X) \\ &= g(f(X)) \\ &= g(P(f)(X)) \\ &= P(g)(P(f)(X)) \\ &= (P(g) \circ P(f))(X), \end{aligned}$$

por lo tanto $P(g \circ f) = P(g) \circ P(f)$.

Ejemplo 1.47 (***Funtor constante***)**.** Dadas las categorías $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$, para cualquier $\boldsymbol{D}$-objeto d se define el funtor constante como $\Delta_d : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$, el cual a cada $\boldsymbol{C}$-objeto c asigna el $\boldsymbol{D}$-objeto $\Delta_d(c) = d$ y a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo f asigna el $\boldsymbol{D}$-morfismo identidad $\Delta_d(f) = 1_d$.

Ejemplo 1.48 (***Hom-funtor***)**.** Una categoría es *localmente pequeña* si entre cada par de objetos la colección de todos los morfismos es un conjunto. Dado un $\boldsymbol{C}$-objeto a en una categoría localmente pequeña $\boldsymbol{C}$, se define el *Hom-funtor* $\boldsymbol{C}(a, -) : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ asignando a cada $\boldsymbol{C}$-objeto b el conjunto

$$\boldsymbol{C}(a, b) = \big\{ f \mid f : a \longrightarrow b \big\}$$

de todos los $\boldsymbol{C}$-morfismos de a en b, y a cada morfismo $g : b \longrightarrow c$ la función $\boldsymbol{C}(a, g) : \boldsymbol{C}(a, b) \longrightarrow \boldsymbol{C}(a, c)$ tal que para cada morfismo $f \in \boldsymbol{C}(a, b)$ es $\boldsymbol{C}(a, g)(f) = g \circ f \in \boldsymbol{C}(a, c)$.

Para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad $1_b : b \longrightarrow b$, se tiene la función $\boldsymbol{C}(a, 1_b) : \boldsymbol{C}(a, b) \longrightarrow \boldsymbol{C}(a, b)$ tal que para cualquier morfismo f de $\boldsymbol{C}(a, b)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}(a, 1_b)(f) &= 1_b \circ f \\ &= f \\ &= id_{\boldsymbol{C}(a,b)}(f), \end{aligned}$$

por lo tanto $\boldsymbol{C}(a, 1_b) = id_{\boldsymbol{C}(a,b)}$.

Ahora, dados los $\boldsymbol{C}$-morfismos $g : b \longrightarrow c$ y $h : c \longrightarrow d$, al $\boldsymbol{C}$-morfismo $h \circ g : b \longrightarrow d$ se asigna la función $\boldsymbol{C}(a, h \circ g) : \boldsymbol{C}(a, b) \longrightarrow \boldsymbol{C}(a, d)$ tal que para cada morfismo f de $\boldsymbol{C}(a, b)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}(a, h \circ g)(f) &= (h \circ g) \circ f \\ &= h \circ (g \circ f) \\ &= \boldsymbol{C}(a, h)(g \circ f) \\ &= \boldsymbol{C}(a, h)(\boldsymbol{C}(a, g)(f)) \\ &= (\boldsymbol{C}(a, h) \circ \boldsymbol{C}(a, g))(f), \end{aligned}$$

por lo tanto $\boldsymbol{C}(a, h \circ g) = \boldsymbol{C}(a, h) \circ \boldsymbol{C}(a, g)$.

El nombre de este funtor proviene de que en algunos contextos el conjunto $\boldsymbol{C}(a, b)$ de todos los morfismos con dominio a y codominio b se denota $\boldsymbol{C}(a, b) = Hom_{\boldsymbol{C}}(a, b)$.

Los ejemplos anteriores son conocidos como los funtores *covariantes*, los cuales preservan la dirección de los morfismos. Un funtor *contravariante* es aquel que reversa la dirección de los morfismos, es decir, al dominio le asigna el codominio y viceversa.

Definición 1.49 (***Funtor contravariante***)**.** Un *funtor* (contravariante) F desde una categoría $\boldsymbol{C}$ a otra categoría $\boldsymbol{D}$ es una función que asigna:

1. A cada $\boldsymbol{C}$-objeto a un $\boldsymbol{D}$-objeto $F(a)$;

2. A cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ un $\boldsymbol{D}$-morfismo $F(f) : F(b) \longrightarrow F(a)$ tal que:

   a) $F(1_a) = 1_{F(a)}$;

   b) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$, siempre que $g \circ f$ esté definida en $\boldsymbol{C}$.

El funtor contravariante $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ puede ser reemplazado por el funtor covariante $F : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{D}$, donde a cada $\boldsymbol{C}^{op}$-objeto a, se asigna el $\boldsymbol{D}$-objeto $F(a)$ y a cada $\boldsymbol{C}^{op}$-morfismo $f^{op} : b \longrightarrow a$, se asigna el $\boldsymbol{D}$-morfismo $F(f^{op}) : F(b) \longrightarrow F(a)$.

Ejemplo 1.50 (***Funtor contravariante partes***)**.** Sea $\overline{P} : \boldsymbol{Con} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ la función que asigna a cada conjunto A el conjunto de partes $P(A)$, y a cada función $f : A \longrightarrow B$ la función $\overline{P}(f) : P(B) \longrightarrow P(A)$ que asigna a cada $X \subseteq B$ la imagen inversa a través de f, es decir, $\overline{P}(f)(X) = f^{-1}(X) \subseteq A$. Luego para cualquier función identidad $id_B : B \longrightarrow B$, se tiene la función $\overline{P}(id_B) : P(B) \longrightarrow P(B)$ tal que, para cada $X \subseteq B$, $\overline{P}(id_B)(X) = id_B^{-1}(X) = X$, por lo tanto $\overline{P}(id_B) = id_{P(B)}$. Ahora dadas las funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, para la composición $g \circ f : A \longrightarrow C$ se tiene la función $\overline{P}(g \circ f) : P(C) \longrightarrow P(B)$ tal que, para cada $Y \subseteq C$:

$$\begin{aligned}
\overline{P}(g \circ f)(Y) &= (g \circ f)^{-1}(Y) \\
&= f^{-1}\left(g^{-1}(Y)\right) \\
&= f^{-1}\left(\overline{P}(g)(Y)\right) \\
&= \overline{P}(f)\left(\overline{P}(g)(Y)\right) \\
&= \left(\overline{P}(f) \circ \overline{P}(g)\right)(Y),
\end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{P}(g \circ f) = \overline{P}(f) \circ \overline{P}(g)$.

Ejemplo 1.51 (***Hom-funtor contravariante***)**.** Sea $\boldsymbol{C}$ una categoría localmente pequeña. Dado un $\boldsymbol{C}$-objeto a, el *Hom-funtor contravariante* $\boldsymbol{C}(-, a) : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$

se define asignando a cada $\boldsymbol{C}$-objeto b el conjunto $\boldsymbol{C}(b,a) = \{f \mid f : b \longrightarrow a\}$ y a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $g : c \longrightarrow b$ la función $\boldsymbol{C}(g,a) : \boldsymbol{C}(b,a) \longrightarrow \boldsymbol{C}(c,a)$ tal que, para cualquier morfismo $f \in \boldsymbol{C}(b,a)$, $\boldsymbol{C}(g,a)(f) = f \circ g \in \boldsymbol{C}(c,a)$.

Para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad $1_b : b \longrightarrow b$, se tiene la función $\boldsymbol{C}(1_b, a) : \boldsymbol{C}(b,a) \longrightarrow \boldsymbol{C}(b,a)$, tal que para cualquier morfismo f de $\boldsymbol{C}(b,a)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}(1_b, a)(f) &= f \circ 1_b \\ &= f \\ &= id_{\boldsymbol{C}(b,a)}(f), \end{aligned}$$

por lo tanto $\boldsymbol{C}(1_b, a) = id_{\boldsymbol{C}(b,a)}$.

Ahora, dados los $\boldsymbol{C}$-morfismos $g : c \longrightarrow b$ y $h : d \longrightarrow c$, a la composición $g \circ h : d \longrightarrow b$ se asigna la función $\boldsymbol{C}(g \circ h, a) : \boldsymbol{C}(b,a) \longrightarrow \boldsymbol{C}(d,a)$ tal que, para cualquier morfismo f de $\boldsymbol{C}(b,a)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}(g \circ h, a)(f) &= f \circ (g \circ h) \\ &= (f \circ g) \circ h \\ &= \boldsymbol{C}(h,a)(f \circ g) \\ &= \boldsymbol{C}(h,a)(\boldsymbol{C}(g,a)(f)) \\ &= (\boldsymbol{C}(h,a) \circ \boldsymbol{C}(g,a))(f), \end{aligned}$$

por lo tanto $\boldsymbol{C}(g \circ h, a) = \boldsymbol{C}(h,a) \circ \boldsymbol{C}(g,a)$.

Dados los funtores $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ y $G : \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{E}$, la composición de F y G es el funtor $G \circ F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{E}$, además esta operación es asociativa y el morfismo identidad es el funtor identidad $1_{\boldsymbol{C}}$. Por lo tanto se considera los funtores como morfismos entre categorías.

Definición 1.52 (***Categoría de categorías***)**.** La categoría de *categorías* denotada $\boldsymbol{Cat}$, tiene como objetos las categorías y como morfismos los funtores.

Definición 1.53 (***Transformación natural***)**.** Una *transformación natural* desde un funtor $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ a un funtor $G : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es una función τ que asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a un $\boldsymbol{D}$-morfismo $\tau_a : F(a) \longrightarrow G(a)$, tal que para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo

$f : a \longrightarrow b$ el siguiente diagrama conmuta en $\boldsymbol{D}$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\ b & F(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b) \end{tikzcd}$$

Es decir, $\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$.

En algunas ocasiones se usa la notación $\tau : F \overset{\cdot}{\longrightarrow} G$ para indicar que τ es una transformación natural desde F hacia G.

El morfismo τ_a es llamado la *componente* de τ.

Ahora si cada componente τ_a de τ es un isomorfismo en $\boldsymbol{D}$ entonces τ es llamado un *isomorfismo natural*. En este caso, para cada $\tau_a : F(a) \longrightarrow G(a)$ existe su inversa $\tau_a^{-1} : G(a) \longrightarrow F(a)$ la cual forma la componente del isomorfismo natural inverso $\tau^{-1} : G \longrightarrow F$. La notación $\tau : F \cong G$ es usada para indicar que τ es un isomorfismo natural.

Ejemplo 1.54 (***Categoría de funtores***)**.** La categoría $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$, de todos los *funtores* desde $\boldsymbol{C}$ hasta $\boldsymbol{D}$ tiene como objetos los funtores $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ entre estas categorías. Los morfismos son todas las transformaciones naturales $\tau : F \longrightarrow G$ entre estos mismos funtores.

La composición de transformaciones naturales $\tau : F \longrightarrow G$ y $\sigma : G \longrightarrow H$ es la transformación natural $\sigma \circ \tau$ definida como sigue. Para cualquier morfismo $f : a \longrightarrow b$ de $\boldsymbol{C}$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "G(f)"] & H(a) \arrow[d, "H(f)"] \\ b & F(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b) \arrow[r, "\sigma_b"'] & H(b) \end{tikzcd}$$

Ahora, para cada objeto a de $\boldsymbol{C}$ se toma $(\sigma \circ \tau)_a = \sigma_a \circ \tau_a$, entonces

$$(\sigma \circ \tau)_b \circ F(f) = \sigma_b \circ \tau_b \circ F(f) = \sigma_b \circ G(f) \circ \tau_a = H(f) \circ \sigma_a \circ \tau_a = H(f) \circ (\sigma \circ \tau)_a .$$

Así $(\sigma \circ \tau)_a$ es una componente de la transformación natural $\sigma \circ \tau : F \longrightarrow H$.

El morfismo identidad para cada funtor $F : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}$ es la transformación identidad $1_F : F \longrightarrow F$ tal que para cada $\boldsymbol{C}$-objeto a el morfismo $(1_F)_a : F(a) \longrightarrow F(a)$ es el morfismo identidad $1_{F(a)}$. Este es un isomorfismo natural.

1.5. Clasificador de subobjetos

La noción categórica de subobjeto nace de monomorfismos cuyo codominio es el objeto dado.

Definición 1.55. Si $f : a \rightarrowtail c$ y $g : b \rightarrowtail c$ son dos monomorfismos con igual codominio c, entonces $f \subseteq g$ si existe un morfismo $h : a \longrightarrow b$ tal que $f = g \circ h$.

Afirmación 1.56. En la definición anterior, el morfismo h es un monomorfismo.

Demostración. Dados el morfismo $h : a \longrightarrow b$ y el monomorfismo $g : b \rightarrowtail c$, para cualquier objeto d y par de morfismos $i, j : d \rightrightarrows a$, la igualdad $h \circ i = h \circ j$, implica por composición de morfismos que $g \circ (h \circ i) = g \circ (h \circ j)$, luego por asociatividad $(g \circ h) \circ i = (g \circ h) \circ j$, entonces $i = j$, ya que $f = g \circ h$ es un monomorfismo, dada la definición anterior. Por lo tanto h es un monomorfismo. $\square$

Afirmación 1.57. La relación $\subseteq$ entre monomorfismos con igual codominio es una relación de preorden.

Demostración. Es reflexiva ya que $f \subseteq f$ puesto que $f = f \circ 1_a$. Es transitiva ya que si $f \subseteq g$ y $g \subseteq k$ entonces $f \subseteq k$, puesto que si $f = g \circ h$ y $g = k \circ i$ entonces $f = k \circ (i \circ h)$. $\square$

Como tal, esta relación induce una relación de equivalencia. Dos monomorfismos $f : a \rightarrowtail c$ y $g : b \rightarrowtail c$ con codominio común son *equivalentes* si existen morfismos $h : a \longrightarrow b$ con $f = g \circ h$ y $k : b \longrightarrow a$ con $g = f \circ k$. Puesto que todos son monomorfismos, esto implica que $k = h^{-1}$ es el inverso de h, así que f y g son equivalentes si y solo si existe un isomorfismo $h : a \cong b$ con $f = g \circ h$. La notación $f \equiv g$ es usada para indicar que f y g son equivalentes y la clase de equivalencia de un monomorfismo $f : a \rightarrowtail c$ se denota

$$[f] = \left\{ g \mid f \equiv g \right\}.$$

Esta relación de equivalencia forma el siguiente conjunto (el conjunto cociente):

$$Sub(c) = \left\{ [f] \,\middle|\, f \text{ es un monomorfismo con } cod\ f = c \right\}$$

Más aún, este es un conjunto *ordenado* por la relación bien definida: $[f] \subseteq [g]$ si y solo si $f \subseteq g$.

Definición 1.58 (***Subobjeto***)**.** Un *subobjeto* de c es una clase de equivalencia de monomorfismos con codominio c.

Por otro lado tenemos que un subobjeto está dado por algún monomorfismo que lo representa, es decir, un subobjeto de un objeto b en $\boldsymbol{C}$ se representa mediante un monomorfismo $f : a \rightarrowtail b$ con codominio b.

Ejemplo 1.59 (***Funtor de subobjetos***)**.** $Sub : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ es el funtor (contravariante) que asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a el conjunto $Sub\,(a)$ de todos sus subobjetos, y a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ la función $Sub\,(f) : Sub\,(b) \longrightarrow Sub\,(a)$, también denotada f^{-1}, que asigna a cada $g : c \rightarrowtail b$ el pullback $f^{-1}g : d \rightarrowtail a$ de g "a lo largo" de f. Por la afirmación 1.42, en tal pullback $f^{-1}g$ es un monomorfismo porque g lo es.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, tail, "f^{-1}g"] \arrow[d] & a \arrow[d, "f"] \\
c \arrow[r, tail, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

Por supuesto, esta construcción solo es posible si la categoría $\boldsymbol{C}$ tiene pullbacks. Pero, cuando existe, es la generalización del funtor contravariante de partes (ejemplo 1.50).

Definición 1.60 (***Elemento***)**.** Si la categoría $\boldsymbol{C}$ tiene objeto terminal 1, entonces un *elemento* de un objeto a se define como un morfismo $x : 1 \longrightarrow a$.

El anterior elemento x de a es un monomorfismo como se probó en la afirmación 1.23.

Definición 1.61 (***Clasificador de subobjetos***)**.** Si $\boldsymbol{C}$ es una categoría con objeto terminal 1, entonces el *clasificador de subobjetos* para $\boldsymbol{C}$ es un objeto Ω acompañado de un morfismo $T : 1 \longrightarrow \Omega$ que satisface el siguiente axioma.

Para cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail d$, existe uno y solo un morfismo $\chi_f : d \longrightarrow \Omega$ tal que el siguiente diagrama es un pullback.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!_a"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

El morfismo χ_f se llama el *morfismo característico* o la característica del monomorfismo f. La letra T asignada al morfismo definido proviene de la aplicación en lógica en la cual se identifica con el valor de verdad verdadero o *true*.

En una categoría finitamente completa que tiene objeto clasificador se tiene el siguiente isomorfismo natural:

$$Sub \cong \boldsymbol{C}(-, \Omega).$$

1.6. Topos

En esta sección se define una clase muy especial de categorías.

Definición 1.62 (***Exponencial***)**.** La categoría $\boldsymbol{C}$ *tiene exponenciales* si tiene productos y, además, para cualesquier $\boldsymbol{C}$-objetos a y b existe un $\boldsymbol{C}$-objeto *exponencial* b^a junto con un morfismo $ev : b^a \times a \longrightarrow b$, llamado el *morfismo evaluador*, tales que para cualquier objeto c y morfismo $g : c \times a \longrightarrow b$ existe un único morfismo $\hat{g} : c \longrightarrow b^a$ tal que $ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$.

$$\begin{tikzcd} b^a \times a \arrow[dr, "ev"] & \\ & b \\ c \times a \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

La asignación de g hacia $\hat{g}$ establece la siguiente biyección natural entre el conjunto de todos los morfismos de $c \times a$ en b, y el conjunto de todos los morfismos de c en b^a.

$$\boldsymbol{C}\,(c \times a, b) \cong \boldsymbol{C}\,(c, b^a)$$

Aquí se utiliza esta notación porque, en realidad, se trata de una equivalencia natural entre los Hom-funtores $\boldsymbol{C}(- \times a, b)$ y $\boldsymbol{C}(-, b^a)$.

Definición 1.63 (***Categoría cartesiana cerrada***)**.** Una categoría se dice *cartesiana cerrada* si es finitamente completa y tiene exponenciales.

Definición 1.64 (***Topos elemental***)**.** Un *topos elemental* es una categoría cartesiana cerrada con clasificador de subobjetos.

Capítulo 2

Topos de prehaces

En todo este capítulo $\boldsymbol{C}$ es una categoría *pequeña*, esto es, la colección de todos los morfismos de $\boldsymbol{C}$ forman un conjunto, al igual que la colección de todos sus objetos. Es claro que toda categoría pequeña es, en particular, localmente pequeña.

2.1. Prehaces

Un prehaz es un funtor contravariante de $\boldsymbol{C}$ en la categoría de los conjuntos.

Definición 2.1 (***Prehaz***)**.** Un *prehaz* sobre la categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ es un funtor $F : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ que asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a un conjunto $F(a)$ y que a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ asigna una función $F(f) : F(b) \longrightarrow F(a)$. Para cada elemento $x \in F(b)$, el elemento $F(f)(x) \in F(a)$ se denota $x \cdot f$.

Lo anterior implica que al $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad $1_a : a \longrightarrow a$ se asigna la función idéntica $F(1_a)$ que a cualquier elemento $y \in F(a)$ hace corresponder $y \cdot 1_a = y \in F(a)$. Luego a los $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : a \longrightarrow b$, $g : b \longrightarrow c$ y $g \circ f$, se asignan las funciones $F(f)$, $F(g)$ y $F(g \circ f) : F(c) \longrightarrow F(a)$, de tal manera que para cualquier elemento $m \in F(c)$ se tiene que $m \cdot (g \circ f) \in F(a)$. Ahora

$$\begin{aligned} F(g \circ f)(m) &= (F(f) \circ F(g))(m) \\ &= F(f)(F(g)(m)) \\ &= F(f)(m \cdot g) \end{aligned}$$

por lo tanto $m \cdot (g \circ f) = (m \cdot g) \cdot f$.

Ejemplo 2.2 (***Prehaces representables***)**.** El Hom-funtor contravariante $\boldsymbol{C}(-,a)$ (ejemplo 1.51) es un prehaz. En general, un prehaz es *representable* si es naturalmente isomorfo al Hom-funtor contravariante $\boldsymbol{C}(-,a)$ para algún $\boldsymbol{C}$-objeto a.

Nota 2.3. En estos términos, una categoría (con adecuadas condiciones) posee clasificador de subobjetos si y solo si el funtor de subobjetos es representable.

Definición 2.4 (***Categoría de prehaces***)**.** La *categoría de prehaces* sobre $\boldsymbol{C}$ es una categoría de funtores, la cual se denota $\widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, cuyos objetos son los funtores $F : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$, es decir, los prehaces sobre $\boldsymbol{C}$. Los morfismos son las transformaciones naturales entre estos funtores, es decir, $\tau : F \longrightarrow G$ es un $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo si para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a, $\tau_a : F(a) \longrightarrow G(a)$ es una función tal que para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ el siguiente diagrama conmuta en $\boldsymbol{Con}$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & F(a) \arrow[r, "\tau_a"] & G(a) \\
b & F(b) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b) \arrow[u, "G(f)"']
\end{tikzcd}$$

Es decir, $G(f) \circ \tau_b = \tau_a \circ F(f)$. Por lo tanto para cualquier $x \in F(b)$, se tiene $\tau_b(x) \cdot f = \tau_a(x \cdot f)$.

El morfismo identidad y la composición entre morfismos de $\widehat{\boldsymbol{C}}$ se definen igual que en la categoría de funtores.

2.2. El lema de Yoneda

Los funtores representables permiten establecer una conexión profunda entre la categoría $\boldsymbol{C}$ y la categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}}$. En lo que sigue, el Hom-funtor contravariante $\boldsymbol{C}(-,a)$ se denotará de manera simple como $y(a)$.

Definición 2.5. Para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ y par de prehaces representables $y(a)$ y $y(b)$, se define una transformación natural $y(f) : y(a) \longrightarrow y(b)$ la cual asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto c la función $y(f)_c : y(a)(c) \longrightarrow y(b)(c)$ dada para todo morfismo h de $y(a)(c)$ como

$$y(f)_c(h) = f \circ h \in y(b)(c).$$

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f \circ h"'] & a \arrow[d, "f"] \\ & b \end{tikzcd}$$

Se nota que para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $g : d \longrightarrow c$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, "g"'] & y(a)(d) \arrow[r, "y(f)_d"] & y(b)(d) \\ c & y(a)(c) \arrow[u, "y(a)(g)"] \arrow[r, "y(f)_c"'] & y(b)(c) \arrow[u, "y(b)(g)"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, sea h un morfismo de $y(a)(c)$ entonces

$$\begin{aligned} \big[y(b)(g)\big]\big[y(f)_c\big](h) &= y(b)(g)(f \circ h) \\ &= (f \circ h) \circ g \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned} \big[y(f)_d\big]\big[y(a)(g)\big](h) &= y(f)_d(h \circ g) \\ &= f \circ (h \circ g) \end{aligned}$$

por lo tanto $y(b)(g) \circ y(f)_c = y(f)_d \circ y(a)(g)$ y así se verifica que, en efecto, $y(f)$ es una transformación natural.

Afirmación 2.6. La función $y : \boldsymbol{C} \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{C}}$ es un funtor.

Demostración. A cada $\boldsymbol{C}$-objeto a se asigna un $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto $y(a)$, y a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo f se asigna el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo o transformación natural $y(f)$.

Ahora a un $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad 1_a se asigna un $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $y(1_a)$, el cual asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto c la función $y(1_a)_c$ tal que, para cada morfismo h de $y(a)(c)$, se tiene

$$y(1_a)_c(h) = 1_a \circ h = h$$

lo cual implica que $y(1_a)$ es la transformación natural identidad, es decir, $y(1_a) = 1_{y(a)}$.

Ahora dados los $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : a \longrightarrow b$ y $g : b \longrightarrow c$, entonces a la composición de f y g se asigna el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $y(g \circ f)$, el cual asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto d la función $y(g \circ f)_d$, tal que para cada morfismo k de $y(a)(d)$ se tiene

$$y(g \circ f)_d(k) = (g \circ f) \circ k.$$

Por otro lado, se asignan los $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismos $y(f)$ y $y(g)$, los cuales a cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto d asignan las funciones $y(f)_d$ y $y(g)_d$, tales que para cada morfismo k de $y(a)(d)$ se tiene

$$\begin{aligned}(y(g)_d \circ y(f)_d)(k) &= y(g)_d(y(f)_d(k)) \\ &= y(g)_d(f \circ k) \\ &= g \circ (f \circ k).\end{aligned}$$

Es decir, $y(g \circ f) = y(g) \circ y(f)$.

Por lo tanto, $y : \boldsymbol{C} \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{C}}$ es un funtor. $\square$

El célebre resultado que sigue establece el lugar preciso que ocupa la "imagen" $y(\boldsymbol{C})$ dentro de la categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}}$.

Teorema 2.7 (***Lema de Yoneda***)**.** Para cualquier $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto F y $\boldsymbol{C}$-objeto a existe una biyección natural

$$Y : Nat(y(a), F) \longrightarrow F(a)$$

la cual asigna a cada transformación natural τ el elemento $Y(\tau) = \tau_a(1_a)$.

Es decir, $Y(\tau) = \tau_a(1_a)$ lo cual tiene pleno sentido porque τ es una transformación natural del funtor contravariante $y(a)$ en el funtor contravariante F, luego para el objeto a existe una función $\tau_a : y(a)(a) \longrightarrow F(a)$ y con toda seguridad $1_a \in y(a)(a) = \boldsymbol{C}(a, a)$.

En la notación del capítulo 1 se tiene $Nat(\boldsymbol{C}(-, a), F) \cong F(a)$.

Demostración. Para comenzar se observa que dado un objeto cualquiera b de $\boldsymbol{C}$, para cada $f : b \longrightarrow a \in y(a)(b)$ se tiene

$$\tau_b(f) = Y(\tau) \cdot f. \qquad (*)$$

En efecto:

$$
\begin{aligned}
\tau_b(f) &= \tau_b(1_a \circ f) \\
&= \tau_b\big(y(a)(f)(1_a)\big) \\
&= \big(\tau_b \circ y(a)(f)\big)(1_a) \\
&= \big(F(f) \circ \tau_a\big)(1_a) \\
&= F(f)\big(\tau_a(1_a)\big) \\
&= F(f)\big(Y(\tau)\big) \\
&= Y(\tau) \cdot f
\end{aligned}
$$

Ahora sean $\sigma, \tau \in Nat(y(a), F)$ transformaciones naturales y supóngase que $Y(\sigma) = Y(\tau)$. Según $(*)$, para cada objeto b y cada $f \in y(a)(b)$ se tiene $\sigma_b(f) = Y(\sigma) \cdot f = Y(\tau) \cdot f = \tau_b(f)$, luego $\sigma_b = \tau_b$ y así $\sigma = \tau$. De esta manera la función Y es inyectiva.

Por otro lado, dado un elemento cualquiera $r \in F(a)$ se define para cada objeto b de $\boldsymbol{C}$ la función $\rho_b : y(a)(b) \longrightarrow F(b)$ como $\rho_b(f) = r \cdot f$. Esto define una transformación natural $\rho : y(a) \longrightarrow F$ pues para cada morfismo $g : b \longrightarrow c$ de $\boldsymbol{C}$ y cada $h \in y(a)(c)$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
\big(F(g) \circ \rho_c\big)(h) &= F(g)(r \cdot h) \\
&= (r \cdot h) \cdot g \\
&= r \cdot (h \circ g) \\
&= \rho_b(h \circ g) \\
&= \rho_b\big(y(a)(g)(h)\big) \\
&= \big(\rho_b \circ y(a)(g)\big)(h)
\end{aligned}
$$

de manera que $F(g) \circ \rho_c = \rho_b \circ y(a)(g)$ y el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "g"'] & y(a)(b) \arrow[r, "\rho_b"] & F(b) \\
c & y(a)(c) \arrow[u, "y(a)(g)"] \arrow[r, "\rho_c"'] & F(c) \arrow[u, "F(g)"']
\end{tikzcd}
$$

En especial para el morfismo identidad 1_a se tiene

$$\rho_a(1_a) = r \cdot 1_a = r,$$

esto es, $Y(\rho) = r$ lo cual indica que la función Y es biyectiva.

Para terminar, lo "natural" de la biyección Y consiste en que "conmuta lo que debe conmutar". Con exactitud, por un lado para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & Nat(y(a), F) \arrow[r] & F(a) \\
b & Nat(y(b), F) \arrow[r] \arrow[u, "-f"] & F(b) \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
$$

Por otra parte, para cualquier transformación natural $\sigma : F \longrightarrow G$ el diagrama siguiente conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[d, "\sigma"'] & Nat(y(a), F) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma-"'] & F(a) \arrow[d, "\sigma_a"] \\
G & Nat(y(a), G) \arrow[r] & G(a)
\end{tikzcd}
$$

Las igualdades correspondientes a estos dos diagramas se verifican de inmediato. $\square$

Corolario 2.8. Para cualesquier $\boldsymbol{C}$-objetos a y b existe una biyección natural

$$Nat(y(a), y(b)) \longrightarrow \boldsymbol{C}(a, b).$$

Demostración. Basta tomar en el lema de Yoneda 2.7 el funtor F como el funtor representable $y(b)$, con lo cual $F(a) = y(b)(a) = \boldsymbol{C}(a, b)$. $\square$

La importancia de los prehaces queda en evidencia en el resultado siguiente, similar al teorema de representación de Cayley de la teoría de Grupos.

Teorema 2.9 (***Representación de Yoneda***)**.** Toda categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ es equivalente a una subcategoría de la categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}}$.

Demostración. El corolario al lema de Yoneda muestra que hay una correspondencia biyectiva y natural entre los $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismos de $y(a)$ a $y(b)$ y los $\boldsymbol{C}$-morfismos de a a b. Luego el funtor y establece la equivalencia mencionada. $\square$

2.3. El topos de prehaces

En esta sección se demuestra con todo detalle que la categoría de los prehaces constituye un topos.

2.3.1. Límites finitos

Definición 2.10 (***Objeto terminal***)**.** Se define el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto $\Delta_1 : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ como el funtor constante al conjunto unitario $1 = \{*\}$, esto es, el prehaz Δ_1 asigna a cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a el conjunto unitario 1 y a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo f la función idéntica 1_1.

Para cualquier $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto F existe un único $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $! : F \longrightarrow \Delta_1$ determinado como sigue: a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a se asigna la función constante $!_a : F(a) \longrightarrow 1$ mediante $!_a(x) = *$ para cada $x \in F(a)$ (esta es la única función posible). Además para cualquier $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ el siguiente diagrama conmuta en $\boldsymbol{Con}$, luego se trata de una transformación natural.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & F(a) \arrow[r, "!_a"] & 1 \\
b & F(b) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "!_b"'] & 1 \arrow[u, "1_1"']
\end{tikzcd}
$$

Definición 2.11 (***Producto***)**.** Si F y G son $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objetos, se define el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto $F \times G$ el cual asigna a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a el conjunto $(F \times G)(a) = F(a) \times G(a)$ (este es el producto cartesiano usual de conjuntos), además a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ asigna la función $(F \times G)(f) = F(f) \times G(f)$ (producto usual de funciones), donde para cada elemento $(x, y) \in (F \times G)(b)$ el elemento $(F(f) \times G(f))(x, y) = \big(F(f)(x), G(f)(y)\big) \in (F \times G)(a)$ se denota $(x, y) \cdot f = (x \cdot f, y \cdot f)$.

De manera adicional se definen los $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismos $\pi_F : F \times G \longrightarrow F$ y $\pi_G : F \times G \longrightarrow G$ los cuales asignan a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a las funciones π_{Fa} y π_{Ga} como $\pi_{Fa}(x, y) = x \in F(a)$ y $\pi_{Ga}(x, y) = y \in G(a)$ para cada $(x, y) \in (F \times G)(a)$.

Se verifica sin dificultad que los π son, en efecto, transformaciones naturales. Luego, para cualquier par de $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismos $\tau : H \longrightarrow F$ y $\sigma : H \longrightarrow G$ existe exactamente un

$\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $\langle \tau, \sigma \rangle : H \longrightarrow F \times G$ que satisface las siguientes igualdades: $\pi_F \circ \langle \tau, \sigma \rangle = \tau$ y $\pi_G \circ \langle \tau, \sigma \rangle = \sigma$. La transformación asigna al $\boldsymbol{C}$-objeto a la función $\langle \tau, \sigma \rangle_a$ dada por $\langle \tau, \sigma \rangle_a (x) = (\tau_a(x), \sigma_a(x))$ para cualquier elemento $x \in H(a)$, luego:

$$\big(\pi_F \circ \langle \tau, \sigma \rangle\big)_a(x) = \pi_{Fa}(\langle \tau, \sigma \rangle_a (x)) = \pi_{Fa}(\tau_a(x), \sigma_a(x)) = \tau_a(x),$$
$$\big(\pi_G \circ \langle \tau, \sigma \rangle\big)_a(x) = \pi_{Ga}(\langle \tau, \sigma \rangle_a (x)) = \pi_{Ga}(\tau_a(x), \sigma_a(x)) = \sigma_a(x).$$

2.3.2. Exponenciales

Sean P y Q dos $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objetos y supóngase que existe un $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto Q^P tal que para cualquier $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto R se tiene que

$$Nat(R \times P, Q) \cong Nat(R, Q^P).$$

Entonces, en particular, para cada funtor representable $R = \boldsymbol{C}(-, a) = y(a)$ por el lema de Yoneda (teorema 2.7) se tiene

$$Nat(y(a) \times P, Q) \cong Nat(y(a), Q^P) \cong Q^P(a)$$

Así, $Q^P(a)$ es el conjunto de todas las transformaciones naturales $\tau : y(a) \times P \longrightarrow Q$, y es de esta manera como se define el funtor exponencial.

Definición 2.12 (***Exponenciales***)**.** Para los $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objetos P y Q, se define el funtor exponencial $Q^P : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ en el $\boldsymbol{C}$-objeto a como

$$Q^P(a) = \{\tau : y(a) \times P \longrightarrow Q \;\big|\; \tau \text{ es transformación natural } \}$$

y en el $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ de manera natural como sigue: dado $\sigma \in Q^P(b)$ se toma $\tau = Q^P(f)(\sigma)$ en cada $\boldsymbol{C}$-objeto c como $\tau_c(h, y) = \sigma_c(fh, y)$.

Además, se define el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $ev : Q^P \times P \longrightarrow Q$ como sigue: para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a y para cualesquier elementos $\tau \in Q^P(a)$, $y \in P(a)$ es

$$ev_a(\tau, y) = \tau_a(1_a, y).$$

Ahora, para cualquier $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto R, dada la transformación natural $\sigma : R \times P \longrightarrow Q$ existe una única transformación natural $\widehat{\sigma} : R \longrightarrow Q^P$ tal que $ev \circ (\widehat{\sigma} \times 1_P) = \sigma$, es decir, tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
Q^P \times P \arrow[dr, "ev"] & \\
& Q \\
R \times P \arrow[uu, "\widehat{\sigma} \times 1_P"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

En efecto, para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a y cualquier elemento $u \in R(a)$, se establece la transformación natural $\widehat{\sigma}_a(u) : y(a) \times P \longrightarrow Q$ como

$$(\widehat{\sigma}_a(u))_c(f, x) = \sigma_c(u \cdot f, x)$$

para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto c, cualquier morfismo $f \in y(a)(c)$ y cualquier $x \in P(c)$.

Por lo tanto se tiene que, para elementos adecuados,

$$
\begin{aligned}
\big(ev \circ (\widehat{\sigma} \times 1_P)\big)_a(u, y) &= ev_a\big((\widehat{\sigma}_a \times 1_{P(a)})(u, y)\big) \\
&= ev_a(\widehat{\sigma}_a(u), y) \\
&= (\widehat{\sigma}_a(u))_a(1_a, y) \\
&= \sigma_a(u \cdot 1_a, y) \\
&= \sigma_a(u, y)
\end{aligned}
$$

con lo cual $ev \circ (\widehat{\sigma} \times 1_P) = \sigma$.

2.3.3. Clasificador de subobjetos

Definición 2.13 (***Criba***)**.** Una *criba* sobre un $\boldsymbol{C}$-objeto c es un conjunto U de $\boldsymbol{C}$-morfismos con codominio c, con la propiedad que dado un $\boldsymbol{C}$-morfismo arbitrario $f : b \longrightarrow c \in U$, para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo g con codominio b se tiene $f \circ g \in U$.

Ejemplo 2.14. $\emptyset$ es una criba sobre cualquier objeto c.

Evidentemente, respecto a la inclusión, $\emptyset$ es la criba mínima sobre c.

El conjunto de *todos* los $\boldsymbol{C}$-morfismos con codominio c se denota t_c.

Afirmación 2.15. t_c es una criba sobre c.

Demostración. Dado cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : b \longrightarrow c \in t_c$, entonces para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $g : a \longrightarrow b$ se tiene $f \circ g \in t_c$ porque $f \circ g : a \longrightarrow c$. $\square$

Evidentemente, respecto a la inclusión, t_c es la criba máxima sobre c.

Afirmación 2.16. $U = t_c$ si y sólo si $1_c \in U$.

Demostración. Como $1_c \in t_c$, si $t_c = U$ entonces $1_c \in U$. Al revés, si $1_c \in U$ entonces para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : b \longrightarrow c$ es $1_c \circ f = f \in U$, así que $U = t_c$. $\square$

Definición 2.17. Dados una criba U sobre c y un $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : b \longrightarrow c$, se define el conjunto $U \cdot f$ de $\boldsymbol{C}$-morfismos con codominio b como sigue:

$$g \in U \cdot f \text{ si y solo si } f \circ g \in U.$$

Es decir, $U \cdot f = \big\{ g : a \longrightarrow b \bigm| f \circ g \in U \big\}$.

Afirmación 2.18. Sea U una criba sobre c y sean $f : b \longrightarrow c$, $g : a \longrightarrow b$ morfismos.

1. $U \cdot f$ es una criba sobre b
2. $(U \cdot f) \cdot g = U \cdot (f \circ g)$
3. $U \cdot 1_c = U$
4. $U \cdot f = t_b$ si y solo si $f \in U$
5. $t_c \cdot f = t_b$

Demostración.

1. Dado cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $g : a \longrightarrow b \in U \cdot f$, por definición esto significa $f \circ g : a \longrightarrow c \in U$. Ahora para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo h con codominio a se tiene $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \in U$, luego $g \circ h \in U \cdot f$. Por lo tanto $U \cdot f$ es una criba sobre b.

2. Para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo h con codominio a se tiene $h \in (U \cdot f) \cdot g$ si y solo si $g \circ h \in U \cdot f$, si y solo si $f \circ (g \circ h) \in U$, si y solo si $(f \circ g) \circ h \in U$, si y solo si $h \in U \cdot (f \circ g)$. Por lo tanto $(U \cdot f) \cdot g = U \cdot (f \circ g)$.

3. Para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo k con codominio c se tiene $k \in U \cdot 1_c$ si y solo si $1_c \circ k \in U$, si y solo si $k \in U$. Por lo tanto $U \cdot 1_c = U$.

4. Por la afirmación 2.16 se tiene $U \cdot f = t_b$ si y solo si $1_b \in U \cdot f$, si y solo si $f \circ 1_b \in U$, si y solo si $f \in U$.

5. Como $f \in t_c$, por el inciso anterior $t_c \cdot f = t_b$. $\square$

Definición 2.19. Se define el *prehaz de cribas* como el objeto Ω de $\widehat{\boldsymbol{C}}$ que a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a asigna el conjunto $\Omega(a)$ de todas las cribas sobre a, y a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ asigna la función $\Omega(f) : \Omega(b) \longrightarrow \Omega(a)$ definida en cada $U \in \Omega(b)$ como $\Omega(f)(U) = U \cdot f \in \Omega(a)$.

Así, en particular, a cada $\boldsymbol{C}$-morfismo identidad 1_a se asigna la función $\Omega(1_a)$ dada para cada $U \in \Omega(a)$ como $U \cdot 1_a = U$, luego $\Omega(1_a) = 1_{\Omega(a)}$. Ahora, para cada par de $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : b \longrightarrow c$, $g : a \longrightarrow b$ y cada $U \in \Omega(c)$ se tiene

$$\begin{aligned}\Omega(f \circ g)(U) &= U \cdot (f \circ g)\\ &= (U \cdot f) \cdot g\\ &= \Omega(g)(U \cdot f)\\ &= \Omega(g)\big(\Omega(f)(U)\big)\\ &= (\Omega(g) \circ \Omega(f))(U).\end{aligned}$$

Es decir, $\Omega(f \circ g) = \Omega(g) \circ \Omega(f)$. Por lo tanto, Ω es en efecto un funtor contravariante.

Definición 2.20. Se define el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $T : \Delta_1 \longrightarrow \Omega$ del prehaz constante Δ_1 (objeto terminal) en el prehaz de cribas Ω, asignando a cada $\boldsymbol{C}$-objeto a la función $T_a : 1 \longrightarrow \Omega(a)$ que al único elemento del conjunto unitario $1 = \{*\}$ hace corresponder la criba máxima, es decir, $T_a(*) = t_a$.

Para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$ el siguiente diagrama conmuta en $\boldsymbol{Con}$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[r, "T_a"] & \Omega(a) \\ b & 1 \arrow[u, "1_1"] \arrow[r, "T_b"'] & \Omega(b) \arrow[u, "\Omega(f)"'] \end{tikzcd}$$

Pues $\big(\Omega(f) \circ T_b\big)(*) = \Omega(f)(t_b) = t_b \cdot f = t_a = T_a(*)$, la penúltima igualdad por la afirmación 2.18. Luego T es, en efecto, una transformación natural.

Definición 2.21 (***Subobjeto***)**.** Un *subobjeto* para un $\widehat{\boldsymbol{C}}$-objeto F es un subfuntor S, es decir, es un prehaz tal que para cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a se tiene que $S(a) \subseteq F(a)$, y para cualquier función $f : a \longrightarrow b$ se tiene que $S(f)$ es la restricción de la función $F(f)$.

Definición 2.22. Sea S un subobjeto del prehaz F. Dado un $\boldsymbol{C}$-objeto c, para cada elemento $x \in F(c)$ se define θ_x como el conjunto de todos los $\boldsymbol{C}$-morfismos $f : b \longrightarrow c$ que cumplen:

$$f \in \theta_x \text{ si y solo si } x \cdot f \in S(b).$$

Es decir, $\theta_x = \big\{ f \;\big|\; x \cdot f \in S(dom(f)) \big\}$.

Afirmación 2.23. Sean S un subobjeto del prehaz F y $x \in F(c)$ para algún objeto c.

1. θ_x es una criba sobre c

2. $\theta_{x \cdot f} = (\theta_x) \cdot f$ para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : b \longrightarrow c$

3. $\theta_x = t_c$ si y solo si $x \in S(c)$

Demostración.

1. Sea $f : b \longrightarrow c$ y supóngase que $f \in \theta_x$, esto es, $x \cdot f \in S(b)$. Para cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $g : a \longrightarrow b$, siendo S un funtor, de $x \cdot f \in S(b)$ se sigue $(x \cdot f) \cdot g \in S(a)$. Pero $(x \cdot f) \cdot g = x \cdot (f \circ g)$, luego por definición $f \circ g \in \theta_x$ y se trata de una criba.

2. Dado $g : a \longrightarrow b$, se tiene $g \in \theta_{x \cdot f}$ si y solo si $(x \cdot f) \cdot g \in S(a)$, si y solo si $x \cdot (f \circ g) \in S(a)$, si y solo si $f \circ g \in \theta_x$, si y solo si $g \in (\theta_x) \cdot f$.

3. Según la afirmación 2.16 es $\theta_x = t_c$ si y solo si $1_c \in \theta_x$, si y solo si $x \cdot 1_c \in S(c)$, si y solo si $x \in S(c)$. $\square$

Definición 2.24. Dados un prehaz F y un subfuntor S del mismo, se define el $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $\chi : F \longrightarrow \Omega$ asignando a cada objeto c la función $\chi_c : F(c) \longrightarrow \Omega(c)$ que al elemento $x \in F(c)$ hace corresponder la criba $\theta_x \in \Omega(c)$, esto es, $\chi_c(x) = \theta_x$.

Para un $\boldsymbol{C}$-morfismo arbitrario $f : a \longrightarrow b$ resulta el siguiente diagrama en $\boldsymbol{Con}$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & F(a) \arrow[r, "\chi_a"] & \Omega(a) \\
b & F(b) \arrow[u, "F(f)"] \arrow[r, "\chi_b"'] & \Omega(b) \arrow[u, "\Omega(f)"']
\end{tikzcd}$$

Ahora para cualquier $x \in F(b)$ se tiene

$$\Omega(f)(\chi_b(x)) = \Omega(f)(\theta_x) = (\theta_x) \cdot f$$

mientras

$$\chi_a(F(f)(x)) = \chi_a(x \cdot f) = \theta_{x \cdot f}.$$

Por la afirmación 2.23 se tiene $\theta_{x \cdot f} = \theta_x \cdot f$, luego $\Omega(f) \circ \chi_b = \chi_a \circ F(f)$. Por lo tanto $\chi : F \longrightarrow \Omega$ es, en efecto, una transformación natural.

Afirmación 2.25. Dados un prehaz F y un subfuntor S del mismo, el siguiente diagrama es un pullback en $\widehat{\boldsymbol{C}}$ siendo j la transformación natural de inclusión.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "!"] \arrow[d, "j"'] & \Delta_1 \arrow[d, "T"] \\ F \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Demostración. Dado cualquier $\boldsymbol{C}$-objeto a, el siguiente diagrama conmuta en $\boldsymbol{Con}$.

$$\begin{tikzcd} S(a) \arrow[r, "!_a"] \arrow[d, "j_a"'] & 1 \arrow[d, "T_a"] \\ F(a) \arrow[r, "\chi_a"'] & \Omega_a \end{tikzcd}$$

Pues para cualquier $x \in S(a)$ se tiene $T_a(!_a(x)) = T_a(*) = t_a$ y $\chi_a(j_a(x)) = \chi_a(x) = \theta_x$, y por la afirmación 2.23 se sabe que $x \in S(a)$ implica $\theta_x = t_a$.

Dado otro prehaz R con transformaciones $\tau : R \longrightarrow \Delta_1$ y $\sigma : R \longrightarrow F$ tales que $T\tau = \chi\sigma$, para cada objeto a y cada $y \in R(a)$ se tiene $\theta_{\sigma_a(y)} = \chi_a(\sigma_a(y)) = T_a(\tau_a(y)) = T_a(*) = t_a$. Luego por la afirmación 2.23 se sigue $\sigma_a(y) \in S(a)$, y así la transformación σ se restringe (de manera única) a una transformación $R \longrightarrow S$. Esto completa la prueba de que se trata de un pullback. □

Afirmación 2.26. El $\widehat{\boldsymbol{C}}$-morfismo $\chi : F \longrightarrow \Omega$ definido en 2.24 es el único que hace que el diagrama de la afirmación 2.25 sea un pullback.

Demostración. Sea $\Upsilon : F \longrightarrow \Omega$ una transformación natural tal que el diagrama de 2.25 es un pullback. Por la manera en que se construyen los límites finitos en $\widehat{\boldsymbol{C}}$, esto implica que para un objeto arbitrario a el correspondiente diagrama es un pullback en

Con, luego por el ejemplo 1.41 el conjunto $S(a)$ es isomorfo al de las parejas $(y, *)$ con $y \in F(a)$ tales que $\Upsilon_a(y) = T_a(*) = t_a$, es decir, $\Upsilon_a(y) = t_a$ si y solo si $y \in S(a)$.

Ahora dados un $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : b \longrightarrow c$ y un elemento $x \in F(c)$, se tiene $f \in \Upsilon_c(x)$ si y solo si $\Upsilon_c(x) \cdot f = t_b$ por la afirmación 2.18; si y solo si $\Upsilon_b(x \cdot f) = t_b$ porque Υ es una transformación natural; si y solo si $x \cdot f \in S(b)$ por la conclusión del párrafo anterior; si y solo si $f \in \theta_x$ por la definición 2.22. Es decir, $\Upsilon_c(x) = \theta_x = \chi_c(x)$ y así $\Upsilon = \chi$. $\square$

Estos resultados permiten concluir que el funtor de prehaces Ω definido en 2.19, junto con la transformación T que escoge la criba máxima, es el clasificador de subobjetos para la categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}}$. Con ello se concluye la demostración del hecho siguiente.

Teorema 2.27. Para cualquier categoría pequeña $\boldsymbol{C}$, la categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ es un topos.

2.4. Ejemplos

Según el teorema 2.27, las siguientes categorías son casos particulares de topos.

Ejemplo 2.28 (*Con*). La categoría de los conjuntos $\boldsymbol{Con}$ es una categoría de prehaces $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ tomando la categoría $\boldsymbol{C}$ con un solo objeto c y un solo morfismo $1_c : c \longrightarrow c$. En este caso, un prehaz sobre $\boldsymbol{C}$ es un funtor $F : \boldsymbol{C}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$, el cual asigna al $\boldsymbol{C}$-objeto c un conjunto $F(c)$ y al $\boldsymbol{C}$-morfismo 1_c la función idéntica $F(1_c) = 1_F(c) : F(c) \longrightarrow F(c)$. A su vez, una transformación natural $\tau : F \longrightarrow G$ es una única función $\tau_c : F(c) \longrightarrow G(c)$. De esta manera se obtienen los conjuntos y las funciones.

En este caso el clasificador de subobjetos Ω está determinado por el único conjunto $\Omega(c)$ de todas las cribas sobre c. Dado que el único morfismo es 1_c, las cribas posibles son $\emptyset$ y $\{1_c\} = t_c$. De esta manera, el clasificador se identifica con el conjunto $\Omega = \{0, 1\}$ acompañado de la función $\{*\} \longrightarrow \Omega$ que asigna a $*$ el elemento máximo 1.

Ejemplo 2.29 (*Conjunto ordenado*). Sea $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ un conjunto ordenado, esta estructura se puede ver como una categoría pequeña según el ejemplo 1.5.

Un prehaz sobre $\boldsymbol{P}$ es un funtor $F : \boldsymbol{P}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$, el cual asigna a cada elemento $a \in P$ un conjunto $F(a)$ y a cualquier $\boldsymbol{P}$-morfismo $f : b \longrightarrow c$, esto es $b \leq c$, una función $F(f) : F(c) \longrightarrow F(b)$. En este caso, para cualquier $x \in F(c)$ el elemento $F(f)(x) \in F(b)$ se denota $x|_b$.

Ahora, dado un $\boldsymbol{P}$-objeto c entonces un $\boldsymbol{P}$-morfismo con codominio c corresponde a un elemento del segmento inicial $(c] = \big\{x \in P \bigm| x \leq c\big\}$ y una criba es un subconjunto H de $(c]$ con la siguiente propiedad adicional: si $b \in H$ (existe un morfismo $b \longrightarrow c$) y $a \leq b$ (existe morfismo $a \longrightarrow b$) entonces también $a \in H$ (el morfismo compuesto $a \longrightarrow c$ pertenece a la criba). Los subconjuntos con estas características se denominan *hereditarios*, así que una criba sobre $c \in P$ corresponde a un subconjunto hereditario de $(c]$.

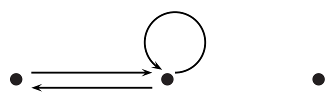
Luego, dado un $\boldsymbol{P}$-morfismo $f : a \longrightarrow b$, esto es $a \leq b$, y una criba H sobre b se tiene $H \cdot f = \{x \leq a \bigm| x \in H\} = H \cap (a]$ que es un subconjunto hereditario de $(a]$.

Por tanto el clasificador de subobjetos del topos de prehaces $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{P}^{op}}$ es el funtor $\Omega : \boldsymbol{P}^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ el cual asigna a cualquier $\boldsymbol{P}$-objeto $c \in P$ el conjunto $\Omega(c) = \big\{H \subseteq (c] \bigm| H \text{ es hereditario } \big\}$, y a cada $\boldsymbol{P}$-morfismo $a \leq b$ la función de restricción $\Omega(b) \longrightarrow \Omega(a)$ que a $H \in \Omega(b)$ hace corresponder $H|_a = H \cap (a] \in \Omega(a)$.

Ejemplo 2.30 (***Grafos dirigidos***)**.** Un *grafo dirigido* G está formado por un conjunto de *vértices* y un conjunto de *arcos* entre cada par de vértices, denotados $V(G)$ y $A(G)$ respectivamente. A cada arco se le asignan dos vértices, el inicial y el final. Un arco se conoce como un *lazo* si su vértice inicial coincide con su vértice final. Un grafo dirigido finito puede dibujarse como un diagrama de puntos y flechas, a cada vértice le corresponde un punto y a cada arco un flecha que va del vértice inicial al final, es decir,

$$\text{(Vértice inicial)} \; \bullet \xrightarrow{\quad\text{(Arco)}\quad} \bullet \; \text{(Vértice final)}$$

Por ejemplo, el siguiente dibujo representa un grafo dirigido con tres vértices y tres arcos, uno de los cuales es un lazo.



En la categoría de los grafos dirigidos los objetos son los grafos dirigidos y los morfismos consisten en un par de funciones, una entre los conjuntos de vértices y otra entre los de arcos, que preservan vértices iniciales y finales. Un subgrafo S de un grafo dirigido G tiene como conjunto de vértices un subconjunto de $V(G)$ y como arcos entre cada pareja de estos vértices escogidos, un subconjunto de los arcos que G posee entre ellos.

La categoría de los grafos dirigidos se puede representar como una categoría de prehaces $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ eligiendo la siguiente categoría pequeña $\boldsymbol{C}$ (no se muestran los morfismos idénticos).

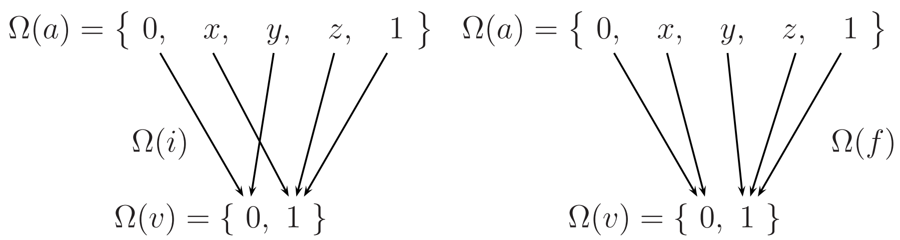
$$a \bullet \overset{i}{\underset{f}{\leftleftarrows}} \bullet\, v$$

Pues un prehaz sobre $\boldsymbol{C}$ consiste en un par de conjuntos $F(a)$ (los arcos de F), $F(v)$ (los vértices) y un par de funciones paralelas $F(i), F(f) : F(a) \longrightarrow F(v)$ que asignan a cada arco su vértice inicial y final, respectivamente. Es decir, cualquier grafo dirigido puede verse como un funtor contravariante de la categoría pequeña $\bullet \leftleftarrows \bullet$ en la de los conjuntos.

En esta categoría $\boldsymbol{C}$, las únicas cribas sobre v son $\emptyset$ y $\{1_v\} = t_v$, mientras las cribas sobre a son $\emptyset$, $\{i\}$, $\{f\}$, $\{i, f\}$ y $\{i, f, 1_a\} = t_a$. Luego el clasificador de subobjetos es un grafo dirigido con dos vértices y cinco arcos. Para mayor sencillez en la representación de este grafo se adoptará la notación siguiente.

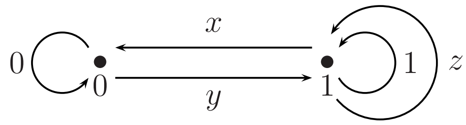
$\Omega(v)$		$\Omega(a)$				
$\emptyset$	$\{1_v\} = t_v$	$\emptyset$	$\{i\}$	$\{f\}$	$\{i, f\}$	$\{i, f, 1_a\} = t_a$
0	1	0	x	y	z	1

Para la ubicación de los arcos del grafo clasificador entre sus vértices es necesario determinar las funciones $\Omega(i)$ y $\Omega(f)$. Por ejemplo, para una criba U sobre a por la afirmación 2.18 se tiene $\Omega(i)(U) = U \cdot i = t_v$ si y solo si $i \in U$, luego la preimagen de $1 = t_v \in \Omega(v)$ es $\{x, z, 1\}$. De la misma manera, $\Omega(f)(U) = U \cdot f = t_v$ si y solo si $f \in U$, luego la preimagen de $1 = t_v \in \Omega(v)$ es $\{y, z, 1\}$. Estos resultados se ilustran como sigue.



De esta manera el arco 0 inicia y termina en el vértice 0, el arco 1 inicia y termina en 1, el arco z también inicia y termina en 1, pero el arco x inicia en 1 y termina en 0 mientras, al contrario, el arco y inicia en 0 y termina en 1.

Por lo tanto el objeto clasificador de subobjetos Ω del topos de grafos dirigidos es el grafo siguiente.



Los elementos de este grafo clasificador se pueden interpretar de otra forma al considerar un subgrafo cualquiera S de un grafo dirigido arbitrario G. El vértice 1 del clasificador representa los vértices de S y el vértice 0 los que no pertenencen a S. El arco 1 representa todos los arcos de S y el arco 0 todos los arcos entre los vértices que no pertenecen a S. El arco x representa los arcos que salen de un vértice de S y llegan a uno que no le pertenece, mientras el arco y, al contrario, representa los que salen de un vértice fuera de S y llegan a uno de S. Por fin, el arco z representa aquellos arcos entre vértices de S que no pertenecen al subgrafo S.

Capítulo 3

Conectivos en topos de prehaces

3.1. Noción de conectivo lógico

En la lógica clásica, los conectivos proposicionales suelen definirse mediante tablas de verdad, donde se identifica V con el valor verdadero y F con falso. Los conectivos usuales son la negación, la conjunción, la disyunción y la implicación y están determinadas de manera completa por las tablas siguientes.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Así pues, los conectivos corresponden a funciones de $\{V, F\}$ en $\{V, F\}$ para la negación y de $\{V, F\}^2 = \{V, F\} \times \{V, F\}$ en $\{V, F\}$ para los binarios. En general, un conectivo es una correspondencia que asigna un valor de verdad a n valores de verdad dados, esto es, una función $\{V, F\}^n \longrightarrow \{V, F\}$. Puesto que el conjunto $\{V, F\}$ es el clasificador de subobjetos en el topos de conjuntos, esta definición sugiere cómo pueden definirse los conectivos en cualquier topos.

3.1.1. En topos elementales

Definición 3.1 (***Conectivo***)**.** Para cualquier topos elemental y cualquier entero no negativo n, un *conectivo* con n argumentos es un morfismo $\Omega^n \longrightarrow \Omega$, donde Ω^n es el producto de n copias del clasificador de subobjetos Ω, es decir, $\Omega^n = \Omega \times \ldots \times \Omega$.

Como se verá en lo que sigue de esta sección, la definición anterior permite diversas representaciones de los conectivos.

Afirmación 3.2. Existe una correspondencia biyectiva entre los conectivos con n argumentos y los subobjetos de Ω^n.

Demostración. Dado el objeto Ω^n, como el objeto Ω clasifica subobjetos, es decir, $Sub \cong \boldsymbol{C}(-,\Omega)$ siendo $\boldsymbol{C}$ el topos elemental, entonces se tiene que $Sub(\Omega^n) \cong \boldsymbol{C}(\Omega^n,\Omega)$. □

Ejemplo 3.3. En el topos ***Con*** de los conjuntos los conectivos corresponden a subconjuntos de $\{V,F\}^n$ de la siguiente manera: a cada conectivo corresponde el conjunto de combinaciones de valores de verdad que tiene como resultado V, o lo que es lo mismo, la imagen recíproca del subconjunto $\{V\}$ por el conectivo.

Así, en particular, a la negación $(\neg)$ corresponde el subconjunto $\{F\}$ de $\{V,F\}$; a la conjunción $(\wedge)$ el subconjunto $\{(V,V)\}$ de $\{V,F\}^2$; a la disyunción $(\vee)$ el subconjunto $\{(V,V),(V,F),(F,V)\}$; y a la implicación $(\Rightarrow)$ el subconjunto $\{(V,V),(F,V),(F,F)\}$ de $\{V,F\}^2$.

La equivalencia natural $Sub \cong \boldsymbol{C}(-,\Omega)$ determina para cada entero positivo n la equivalencia $Sub^n \cong [\boldsymbol{C}(-,\Omega)]^n$. Por la propiedad universal del producto, cada familia ordenada de n morfismos $a \longrightarrow \Omega$ corresponde a un único morfismo $a \longrightarrow \Omega^n$, lo cual determina un isomorfismo natural $[\boldsymbol{C}(-,\Omega)]^n \cong \boldsymbol{C}(-,\Omega^n)$. De esta manera, para cada n el funtor Sub^n es representable por el objeto Ω^n. En símbolos:

$$Sub^n \cong \boldsymbol{C}(-,\Omega^n).$$

Aplicando a esta situación el lema de Yoneda y en especial su consecuencia (corolario 2.8), se obtiene el siguiente isomorfismo natural.

$$Nat(Sub^n, Sub) \cong Nat(\boldsymbol{C}(-,\Omega^n), \boldsymbol{C}(-,\Omega)) \cong \boldsymbol{C}(\Omega^n,\Omega)$$

Con esto se ha demostrado el hecho que sigue.

Afirmación 3.4. Existe una correspondencia biyectiva entre los conectivos con n argumentos y las transformaciones naturales de Sub^n en Sub.

Ahora, una transformación natural $\tau : Sub^n \longrightarrow Sub$ consta de una operación T_c con n argumentos en el conjunto de subobjetos de c, para cada objeto c. Esta clase de operaciones es natural en el sentido de que para cada morfismo $f : a \longrightarrow c$ y para cada familia de n monomorfismos $f_1 : s_1 \rightarrowtail c, \ldots, f_n : s_n \rightarrowtail c \in Sub\,(c)$ se tiene

$$f^{-1}\left(T_c\left(f_1, \ldots, f_n\right)\right) = T_a\left(f^{-1}(f_1), \ldots, f^{-1}(f_n)\right).$$

Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & Sub^n(a) \arrow[r, "T_a"] & Sub(a) \\ c & Sub^n(c) \arrow[u, "f^{-1}\times\ldots\times f^{-1}"] \arrow[r, "T_c"'] & Sub(c) \arrow[u, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Si $\gamma : \Omega^n \longrightarrow \Omega$ es un conectivo con n argumentos, la correspondiente transformación natural Γ se define como sigue: para cada familia ordenada de monomorfismos $f_1 : s_1 \rightarrowtail c, \ldots, f_n : s_n \rightarrowtail c \in Sub(c)$, el subobjeto $f : \Gamma\left(f_1, \ldots, f_n\right) \rightarrowtail c$ satisface

$$\chi_f = \gamma \circ \langle \chi_{f_1}, \ldots, \chi_{f_n} \rangle.$$

Recuérdese de la definición 1.61 que, en cada caso, $\chi_{f_i} : c \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico del subobjeto representado por el monomorfismo f_i.

En el otro sentido, si $L : Sub^n \longrightarrow Sub$ es una transformación natural entonces el conectivo correspondiente es

$$\chi_\phi : \Omega^n \longrightarrow \Omega$$

donde $\phi = L_{\Omega^n}\left(\phi_1, \ldots, \phi_n\right) \rightarrowtail \Omega^n \in Sub(\Omega^n)$ siendo $\phi_i : p_i \rightarrowtail \Omega^n$, para cada $1 \leq i \leq n$, el subobjeto de Ω^n que satisface $\chi_{\phi_i} = \pi_i$ (la i-ésima proyección de Ω^n sobre Ω), de tal manera que $\langle \chi_{\phi_1}, \ldots, \chi_{\phi_n} \rangle = 1_{\Omega^n}$.

Ejemplo 3.5. En la categoría ***Con*** de los conjuntos se tiene

$$Nat\left(\overline{P}^n, \overline{P}\right) \cong \{V, F\}^{\left(\{V,F\}^n\right)},$$

donde $\overline{P}$ es el funtor contravariante de partes (ejemplo 1.50).

En efecto, en el topos de conjuntos el clasificador de subobjetos es el conjunto $\{V, F\}$ luego un conectivo con n argumentos es una función $\{V, F\}^n \longrightarrow \{V, F\}$. Dado un conectivo $C : \{V, F\}^n \longrightarrow \{V, F\}$, este induce para cada conjunto A la operación $\{C_A : P(A)^n \longrightarrow P(A)\}$ la cual esta definida como

$$C_A(S_1, \ldots, S_n) = \left\{a \in A \mid C(\chi_{S_1}(a), \ldots, \chi_{S_n}(a)) = V\right\}$$

donde χ_S denota la función característica de S en A dada por la regla $\chi_S(a) = V$ si $a \in S$ y $\chi_S(a) = F$ si $a \notin S$. Se prueba sin dificultad que esta operación es natural.

En particular los conectivos usuales $\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\Rightarrow$ inducen respectivamente las siguientes operaciones, definidas para cada conjunto A y subconjuntos $S, T \in P(A)$:

1. El complemento $S^c = A - S = \neg_A(S)$, ya que para cualquier $S \in P(A)$ y cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} a \in \neg_A(S) \text{ si y solo si } & \neg(\chi_S(a)) = V \\ \text{si y solo si } & \chi_S(a) = F \\ \text{si y solo si } & a \notin S \\ \text{si y solo si } & a \in S^c \end{aligned}$$

2. La intersección $S \cap T = \wedge_A(S, T)$, ya que para cualquier $(S, T) \in P(A) \times P(A)$ y cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} a \in \wedge_A(S, T) \text{ si y solo si } & \wedge(\chi_S(a), \chi_T(a)) = V \\ \text{si y solo si } & \chi_S(a) = V \text{ y } \chi_T(a) = V \\ \text{si y solo si } & a \in S \text{ y } a \in T \\ \text{si y solo si } & a \in S \cap T \end{aligned}$$

3. La unión $S \cup T = \vee_A(S, T)$, ya que para cualquier $(S, T) \in P(A) \times P(A)$ y cada $a \in A$ se tiene que

$$\begin{aligned} a \in \vee_A(S, T) \text{ si y solo si } & \vee(\chi_S(a), \chi_T(a)) = V \\ \text{si y solo si } & (\chi_S(a) = V \text{ y } \chi_T(a) = V) \text{ o} \\ & \quad (\chi_S(a) = V \text{ y } \chi_T(a) = F) \text{ o } (\chi_S(a) = F \text{ y } \chi_T(a) = V) \\ \text{si y solo si } & (a \in S \text{ y } a \in T) \text{ o } (a \in S \text{ y } a \notin T) \text{ o } (a \notin S \text{ y } a \in T) \\ \text{si y solo si } & a \in S \cap T \text{ o } a \in S \cap T^c \text{ o } a \in S^c \cap T \\ \text{si y solo si } & a \in S \cup T \end{aligned}$$

4. El conjunto $S^c \cup T = \Rightarrow_A(S,T)$, ya que para cualquier $(S,T) \in P(A) \times P(A)$ y cada $a \in A$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
a \in \Rightarrow_A(S,T) \text{ si y solo si } & \Rightarrow (\chi_S(a), \chi_T(a)) = V \\
\text{si y solo si } & (\chi_S(a) = V \text{ y } \chi_T(a) = V) \text{ o} \\
& \quad (\chi_S(a) = F \text{ y } \chi_T(a) = V) \text{ o } (\chi_S(a) = F \text{ y } \chi_T(a) = F) \\
\text{si y solo si } & (a \in S \text{ y } a \in T) \text{ o } (a \notin S \text{ y } a \in T) \text{ o } (a \notin S \text{ y } a \notin T) \\
\text{si y solo si } & a \in S \cap T \text{ o } a \in S^c \cap T \text{ o } a \in S^c \cap T^c \\
\text{si y solo si } & a \in T \text{ o } a \in S^c \cap T^c \\
\text{si y solo si } & a \in S^c \cup T
\end{aligned}
$$

3.1.2. En topos de prehaces

En un topos de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$, el objeto clasificador puede tomarse como el funtor Ω que a cada $\boldsymbol{C}$-objeto c asigna el conjunto $\Omega(c)$ de todas las cribas sobre c (sección 2.3.3). En consecuencia, un conectivo $\Omega^n \longrightarrow \Omega$ es una transformación natural que en cada objeto toma n cribas sobre el mismo y le asigna una criba. Es decir, en una categoría de prehaces un conectivo puede verse como una operación entre cribas, que por supuesto debe ser natural.

Con mayor detalle, un conectivo en el topos de prehaces $\boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ está dado por una transformación natural $\gamma : \Omega^n \longrightarrow \Omega$ que en cada $\boldsymbol{C}$-objeto c determina una operación γ_c que a las cribas $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \Omega(c)$ asigna la criba $\gamma_c(U_1, U_2, \ldots, U_n) \in \Omega(c)$. La naturalidad de esta operación consiste en que para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : b \longrightarrow c$ y cada sucesión de cribas $U_1, U_2, \ldots, U_n$ se tiene

$$\gamma_c(U_1, U_2, \ldots, U_n) \cdot f = \gamma_b(U_1 \cdot f, U_2 \cdot f, \ldots, U_n \cdot f).$$

Afirmación 3.6. En un topos de prehaces existe una correspondencia biyectiva entre los conectivos con n argumentos y las funciones Γ que a cada $\boldsymbol{C}$-objeto c asignan un subconjunto $\Gamma(c) \subseteq \Omega(c)^n$ tal que, para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow c$, si $(U_1, \ldots, U_n) \in \Gamma(c)$ entonces $(U_1 \cdot f, \ldots, U_n \cdot f) \in \Gamma(a)$.

Aquí Γ determina un subfuntor de Ω^n, de manera que este resultado corresponde a la afirmación general 3.2.

Sea $\lambda : \Omega^n \longrightarrow \Omega$ un conectivo con n argumentos. La correspondiente función L está definida en cada objeto c mediante la equivalencia siguiente.

$$(U_1, \ldots, U_n) \in L(c) \text{ si y solo si } \lambda_c(U_1, \ldots, U_n) = t_c \text{ (la criba máxima)}$$

En el otro sentido, sea Γ una función que satisface las condiciones del enunciado. La transformación natural $\gamma : \Omega^n \longrightarrow \Omega$ correspondiente está definida en cada c como sigue.

$$\gamma_c(U_1, \ldots, U_n) = \big\{ f : d \longrightarrow c \;\big|\; (U_1 \cdot f, \ldots, U_n \cdot f) \in \Gamma(d) \big\}$$

Ahora, a partir de las operaciones conjuntistas tradicionales se pueden definir los conectivos lógicos usuales en un topos de prehaces como operaciones entre cribas.

Afirmación 3.7. En una categoría $\boldsymbol{C}$ sean $U, V \in \Omega(c)$ cribas sobre un $\boldsymbol{C}$-objeto c.

1. La intersección $U \cap V$ es una criba sobre c.
2. La unión $U \cup V$ es una criba sobre c.
3. El conjunto $U \supset V = \big\{ f : a \longrightarrow c \;\big|\; U \cdot f \subseteq V \cdot f \big\}$ es una criba sobre c.
4. El conjunto $\sim U = \big\{ f : a \longrightarrow c \;\big|\; U \cdot f = \emptyset \big\}$ es una criba sobre c.

Demostración.

1. Dado cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow c \in U \cap V$ se tiene que $f \in U$ y $f \in V$, luego como U y V son cribas sobre el $\boldsymbol{C}$-objeto c para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo g con codominio a es $f \circ g \in U$ y $f \circ g \in V$. Por lo tanto $f \circ g \in U \cap V$, y la intersección también es una criba.

2. Dado $f : a \longrightarrow c \in U \cup V$ se tiene que $f \in U$ o $f \in V$, luego como U y V son cribas para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo g con codominio a es $f \circ g \in U$ o $f \circ g \in V$. Por lo tanto $f \circ g \in U \cup V$ y esta es una criba.

3. Dado $f : a \longrightarrow c \in U \supset V$ se tiene que $U \cdot f \subseteq V \cdot f$, luego para cada $\boldsymbol{C}$-morfismo g con codominio a es $U \cdot (f \circ g) = (U \cdot f) \cdot g \subseteq (V \cdot f) \cdot g = V \cdot (f \circ g)$, es decir, $U \cdot (f \circ g) \subseteq V \cdot (f \circ g)$. Por lo tanto $f \circ g \in U \supset V$ y este conjunto es una criba sobre c.

4. Aquí, puesto que $\emptyset \cdot f = \emptyset$, basta observar que $\sim U = \big\{ f : a \longrightarrow c \;\big|\; U \cdot f = \emptyset \big\} = \big\{ f : a \longrightarrow c \;\big|\; U \cdot f \subseteq \emptyset \cdot f \big\} = U \supset \emptyset$ y este es un caso particular del anterior. $\square$

La operación $\supset$ generaliza la implicación, como se observa en el resultado siguiente que corresponde al célebre "teorema de la deducción" de la lógica proposicional.

Afirmación 3.8. Para cada criba $R \in \Omega(c)$ se tiene $R \subseteq U \supset V$ si y solo si $R \cap U \subseteq V$.

Demostración. Supóngase que $R \subseteq U \supset V$ y sea $f : a \longrightarrow c \in R \cap U$. Como $f \in R$, por hipótesis $U \cdot f \subseteq V \cdot f$; y como $f \in U$, es $U \cdot f = t_c$ (afirmación 2.18). Así que también $V \cdot f = t_c$, es decir, $f \in V$. De esta manera $R \cap U \subseteq V$.

En el otro sentido, supóngase que $R \cap U \subseteq V$ y sea $g : b \longrightarrow c \in R$. Dado un morfismo h con codominio b tal que $h \in U \cdot g$, esto significa $g \circ h \in U$. Puesto que R es una criba, de $g \in R$ se sigue $g \circ h \in R$. Así que $g \circ h \in R \cap U$ luego, por hipótesis, $g \circ h \in V$. Es decir, $h \in V \cdot g$ y de esta manera $U \cdot g \subseteq V \cdot g$, es decir, $g \in U \supset V$. En conclusión, $R \subseteq U \supset V$. $\square$

Corolario 3.9. Para cada criba $R \in \Omega(c)$ se tiene $R \subseteq \sim U$ si y solo si $R \cap U = \emptyset$.

Demostración. Según la prueba de (*4*) de la afirmación 3.7, $\sim U = U \supset \emptyset$. Luego por la última afirmación anterior, $R \subseteq \sim U$ si y solo si $R \subseteq U \supset \emptyset$, si y solo si $R \cap U \subseteq \emptyset$, si y solo si $R \cap U = \emptyset$. $\square$

El resultado siguiente demuestra la naturalidad de estas operaciones, es decir, que ellas definen auténticos conectivos en el topos de prehaces.

Afirmación 3.10. En una categoría $\boldsymbol{C}$ sean $U, V \in \Omega(c)$ cribas sobre un $\boldsymbol{C}$-objeto c y sea $f : b \longrightarrow c$ un $\boldsymbol{C}$-morfismo.

1. $(\sim U) \cdot f = \sim(U \cdot f)$
2. $(U \cap V) \cdot f = (U \cdot f) \cap (V \cdot f)$
3. $(U \cup V) \cdot f = (U \cdot f) \cup (V \cdot f)$
4. $(U \supset V) \cdot f = (U \cdot f) \supset (V \cdot f)$

Demostración. Sea $g : a \longrightarrow b$ un $\boldsymbol{C}$-morfismo.

1. $g \in (\sim U) \cdot f$ si y solo si $f \circ g \in \sim U$, si y solo si $U \cdot (f \circ g) = \emptyset$, si y solo si $(U \cdot f) \cdot g = \emptyset$, si y solo si $g \in \sim(U \cdot f)$.

2. $g \in (U \cap V) \cdot f$ si y solo si $f \circ g \in U \cap V$, si y solo si $f \circ g \in U$ y $f \circ g \in V$, si y solo si $g \in U \cdot f$ y $g \in V \cdot f$, si y solo si $g \in (U \cdot f) \cap (V \cdot f)$.

3. $g \in (U \cup V) \cdot f$ si y solo si $f \circ g \in U \cup V$, si y solo si $f \circ g \in U$ o $f \circ g \in V$, si y solo si $g \in U \cdot f$ o $g \in V \cdot f$, si y solo si $g \in (U \cdot f) \cup (V \cdot f)$.

4. $g \in (U \supset V) \cdot f$ si y solo si $f \circ g \in U \supset V$, si y solo si $U \cdot (f \circ g) \subseteq V \cdot (f \circ g)$, si y solo si $(U \circ f) \circ g \subseteq (V \circ f) \circ g$, si y solo si $g \in (U \cdot f) \supset (V \cdot f)$. □

Definición 3.11. En una categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Con}^{\boldsymbol{C}^{op}}$ se definen los *conectivos usuales* negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) e implicación ($\Rightarrow$) como las siguientes transformaciones naturales, aquí c es un $\boldsymbol{C}$-objeto arbitrario y $U, V \in \Omega(c)$ son cribas sobre c.

1. $\neg_c(U) = \sim U$
2. $\wedge_c(U, V) = U \cap V$
3. $\vee_c(U, V) = U \cup V$
4. $\Rightarrow_c (U, V) = U \supset V$

A continuación se estudian algunos ejemplos específicos en topos diferentes al de los conjuntos.

Ejemplo 3.12 (***Prehaces de un conjunto ordenado***)**.** Si $\boldsymbol{P} = (P, \leq)$ es un conjunto ordenado, según el ejemplo 1.5 se puede ver como una categoría y en el ejemplo 2.29 se describió el correspondiente topos $\widehat{\boldsymbol{P}}$ de prehaces. Dado un $\boldsymbol{P}$-objeto c, esto es un elemento $c \in P$, una criba sobre c es un subconjunto hereditario de $(c] = \{x \in P \mid x \leq c\}$, por ejemplo $\emptyset$ y $(c]$ son cribas sobre c.

Si H y G son cribas sobre c, se verifica de inmediato que la intersección $H \cap G$ y la unión $H \cup G$ son cribas sobre c. Ahora se define el conjunto $H \supset G = \{x \in (c] \mid H \cap (x] \subseteq G\}$, esta es una criba sobre c. En efecto, para cualquier $b \in H \supset G$ se tiene $H \cap (b] \subseteq G$, luego dado cualquier $a \leq b$ es $(a] \subseteq (b]$ de donde $H \cap (a] \subseteq H \cap (b] \subseteq G$ y, por tanto, $a \in H \supset G$. Se concluye que $H \supset G$ es un subconjunto hereditario de $(c]$. Es inmediato verificar que para cada criba I sobre c se tiene $I \subseteq H \to G$ si y sólo si $I \cap H \subseteq G$.

Si H es una criba sobre $c \in P$ se define el conjunto $\sim H = \{x \in (c] \mid H \cap (x] = \emptyset\}$, esto es, $x \in \sim H$ si y solo si x no supera ningún elemento de H. Esta es una criba sobre

c pues dado cualquier $\boldsymbol{P}$-objeto $b \in \sim H$ se tiene $H \cap (b] = \emptyset$, luego dado $a \leq b$ es $(a] \subseteq (b]$ de donde $H \cap (a] \subseteq H \cap (b] = \emptyset$ y también $H \cap (a] = \emptyset$, por tanto, $a \in \sim H$.

Ejemplo 3.13 (***Conectivos en los grafos dirigidos*****).** En el topos de prehaces de grafos dirigidos como se definió en 2.30, dados los subgrafos S y T de un grafo dirigido G se tiene que $S \cap T$ es el subgrafo cuyos vértices y arcos son los comunes a S y T, y $S \cup T$ es el subgrafo cuyos vértices y arcos son los que pertenecen a S o a T.

Ahora, se define $S \supset T$ como el subgrafo cuyo conjunto de vértices es $V(S)^c \cup V(T)$, donde el complemento se considera con respecto a $V(G)$, y los arcos entre estos vértices corresponden a los que, si pertenecen a S entonces también pertenecen a T, es decir, todos los arcos cuyo vértice inicial y final pertenecen a $V(S \supset T)$ excepto aquellos de S que no pertenecen a T.

Por último, se tiene $\sim S$ como el subgrafo cuyo conjunto de vértices es $V(S)^c$ y sus arcos entre estos vértices corresponden a todos los arcos de G, puesto que no hay arcos de S entre los vértices que no pertenecen a S.

3.2. Combinaciones clásicas

En la lógica clásica existen importantes tautologías que representan formas de razonamiento siempre verdaderas, tales como la doble negación y el tercero excluido las cuales tienen como esquema $\neg\neg p \Rightarrow p$ y $p \vee \neg p$ para cualquier proposición p, de las cuales resulta fácil observar en las tablas de verdad que corresponden en efecto a tautologías.

3.2.1. Doble negación

En la categoría de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}}$, dada una criba U sobre un $\boldsymbol{C}$-objeto c, la doble negación corresponde al siguiente conjunto.

$$\begin{aligned} \sim\sim U &= \left\{ f : b \longrightarrow c \;\middle|\; \sim U \cdot f = \emptyset \right\} \\ &= \left\{ f : b \longrightarrow c \;\middle|\; \textit{para cada } g : a \longrightarrow b \textit{ se tiene } U \cdot (f \circ g) \neq \emptyset \right\} \end{aligned}$$

Afirmación 3.14. Dada una criba U sobre c se tiene $U \subseteq \sim\sim U$.

Demostración. Si $f : b \longrightarrow c \in U$ entonces para cada $g : a \longrightarrow b$ se tiene $f \circ g \in U$ porque es criba, luego $U \cdot (f \circ g) = t_c \neq \emptyset$ y así $f \in {\sim\sim}U$. $\square$

En general, sin embargo, no se tiene la igualdad. Es decir, en la lógica proposicional de los topos de prehaces no se cumple la "ley de la doble negación".

Ejemplo 3.15 (*Conjuntos ordenados*). En el topos de prehaces del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con su orden usual sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m < n$. Entonces $(m]$ es una criba sobre el elemento n y para esta criba se tiene ${\sim}(m] = \emptyset$, pues dado cualquier $x \leq n$ se tiene $(m] \cap (x] \neq \emptyset$. En consecuencia ${\sim\sim}(m] = {\sim}\emptyset = (n]$ y como $(m] \neq (n]$ se tiene un ejemplo en el cual ${\sim\sim}(m] \neq (m]$.

Ejemplo 3.16 (*Grafos dirigidos*). En el topos de grafos dirigidos, si S es un subgrafo de cierto grafo G entonces ${\sim\sim}S$ es el subgrafo pleno correspondiente a S, el cual tiene los mismos vértices que S pero, entre ellos, todos los arcos de G. Es claro que el doble complemento puede ser estrictamente mayor que el subgrafo original. Por lo tanto, en general, ${\sim\sim}S \neq S$.

3.2.2. Tercero excluido

En la categoria de prehaces $\widehat{\boldsymbol{C}}$, para una criba U sobre el $\boldsymbol{C}$-objeto c la conjunción de una fórmula con su negación corresponde a la criba

$$U \cup {\sim}U = \left\{ f : a \longrightarrow c \;\middle|\; f \in U \;\; o \;\; U \cdot f = \emptyset \right\}.$$

Ahora, por la afirmación 2.16 se tiene $U \cup {\sim}U = t_c$ si y solo si $1_c \in U \cup {\sim}U$, si y solo si $1_c \in U$ o $U \cdot 1_c = \emptyset$, si y solo si $U = t_c$ o $U = \emptyset$. En consecuencia, para cualquier criba propia y no vacía U, esto es $U \neq t_c$ y $U \neq \emptyset$, se tiene $U \cup {\sim}U \neq t_c$ lo cual significa que la fórmula $p \vee \neg p$ no es válida. Es decir, en la lógica proposicional de los topos de prehaces no se cumple la "ley del tercero excluido".

Ejemplo 3.17 (*Conjuntos ordenados*). Como en el apartado anterior, en el topos de prehaces del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con su orden usual sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m < n$. Entonces $(m]$ es una criba propia y no vacía sobre el elemento n luego para esta criba se tiene $(m] \cup {\sim}(m] = (m] \cup \emptyset = (m] \neq t_n = (n]$.

Ejemplo 3.18 (***Grafos dirigidos***)**.** En el topos de grafos dirigidos, si S es un subgrafo de cierto grafo G entonces $S \cup \sim S$ es el subgrafo que tiene todos los vértices de G, entre los vértices de S los arcos originales del subgrafo y entre los vértices del complemento todos los arcos de G. En cambio no se considera ningún arco que sale o que entra de S, esto es, en $S \cup \sim S$ no hay ningún arco cuyo vértice inicial está en $V(S)$ y cuyo vértice final está en $V(S)^c$, ni viceversa. Es claro que este subgrafo puede ser estrictamente menor que el grafo completo G. Por lo tanto, en general, $S \cup \sim S \neq G$.

3.2.3. Lógica intuicionista

Los resultados anteriores permiten afirmar de manera concluyente que la lógica de los topos de prehaces no es clásica. Sin embargo, a partir de la afirmación 3.8 se puede deducir de manera inmediata que en cualquier topos de prehaces las cribas sobre un objeto constituyen un álgebra de Heyting [11]. Esto a su vez implica que la lógica de cualquier topos de prehaces satisface los axiomas de la lógica intuicionista.

En este trabajo no se ahondará en los detalles de estos hechos.

3.3. Completitud de conectivos

En la lógica clásica el conjunto de conectivos $\{\vee, \neg\}$ es completo, es decir, toda fórmula se puede expresar en términos de $\vee$ y $\neg$. Lo mismo sucede con el conjunto de conectivos $\{\wedge, \neg\}$, una demostración de este hecho se puede observar en el teorema 1 de [13]. Por ejemplo, la expresión más sencilla de la implicación $p \to q$ en términos de $\{\vee, \neg\}$ es $\neg p \vee q$.

Afirmación 3.19. Sean U y V cribas sobre c, entonces $\sim U \cup V \subseteq U \supset V$.

Demostración. Dado cualquier $\boldsymbol{C}$-morfismo $f : a \longrightarrow c \in \sim U \cup V$, se tiene que $f \in \neg U$ o $f \in V$, esto es, $U \cdot f = \emptyset$ o $V \cdot f = t_a$. Ahora bien, si $U \cdot f = \emptyset$, para la criba $V \cdot f$ sobre a se tiene $U \cdot f = \emptyset \subseteq V \cdot f$; por otra parte, si $V \cdot f = t_a$, para la criba $U \cdot f$ sobre a se tiene $U \cdot f \subseteq t_a = V \cdot f$. En cualquier caso $U \cdot f \subseteq V \cdot f$, por tanto $f \in U \supset V$. $\square$

En general, sin embargo, no se tiene la igualdad.

Ejemplo 3.20 (***Conjuntos ordenados***)**.** En el topos de prehaces del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con su orden usual sean $k, m, n \in \mathbb{Z}$ con $k \leq m < n$. Entonces para las cribas $(k]$, $(m]$ sobre n se tiene $(k] \supset (m] = t_n = (n]$, pues de $(k] \subseteq (m]$ se sigue $(k] \cap (x] \subseteq (m] \cap (x]$ para cada $x \leq n$, y por otra parte $\sim (k] \cup (m] = \emptyset \cup (m] = (m] \neq (n]$.

Puesto que en la lógica de los topos de prehaces no se puede expresar la implicación en términos del conjunto $\{\vee, \neg\}$ de la manera tradicional, se puede pensar que este conjunto de conectivos no es completo en esa lógica proposicional. Más aún, se puede probar que el conjunto de los conectivos usuales definidos en 3.11 no es completo en la lógica de los topos de prehaces. En este trabajo no se profundizará en los detalles de este hecho, solo se mostrará un ejemplo.

Ejemplo 3.21 (***Grafos dirigidos***)**.** A cualquier subgrafo S de un grafo dirigido G se asigna el siguiente grafo $\Gamma(S)$: los vértices de $\Gamma(S)$ son todos los de G y los arcos de $\Gamma(S)$ son aquellos que salen de S, es decir, todos los arcos de G cuyo vértice inicial pertenece a $V(S)$ y cuyo vértice final pertenece a $V(S)^c$. Se puede verificar que esta es una operación natural en los subgrafos. Pero no es combinación de los conectivos usuales porque cualquiera de tales combinaciones aplicada al subgrafo vacío $\emptyset$ arroja como resultado $\emptyset$ o bien G, mientras $\Gamma(\emptyset)$ es el subgrafo que consta de todos los vértices de G y ningún arco luego, en general, $\Gamma(\emptyset) \neq \emptyset$ y $\Gamma(\emptyset) \neq G$.

De esta manera surge la inquietud sobre la existencia de algún conjunto de conectivos completos para la lógica proposicional de los topos de prehaces.

Conclusiones

La travesía por el universo matemático enmarcado en este trabajo inició con el estudio de los conceptos básicos de la teoría de categorías, permitiendo la adquisición del material necesario para abordar uno de los temas fundamentales de la lógica como es el de los conectivos, presentado bajo la perspectiva de los topos de prehaces.

En el segundo capítulo, siguiendo el camino propuesto en [10] para la construcción del topos de prehaces, se determinó mostrar de forma precisa y sencilla cada una de las nociones que intervienen en la obtención de la estructura de topos, contextualizando de una forma comprensible la noción del objeto clasificador de subobjetos a través de las cribas. Además se muestran algunos ejemplos particulares de topos de prehaces tomando la categoría de conjuntos ordenados y la categoría de grafos dirigidos. Complementando, debido a la importancia en la definición de los conectivos en el topos, se estudió con detalle el célebre lema de Yoneda el cual consolida una representación de cualquier categoría pequeña en un adecuado topos de prehaces.

Por otra parte, se establece que en un topos elemental se pueden definir cada uno de los conectivos proposicionales a partir de morfismos en el clasificador, por tanto cada uno de los topos está dotado de un lógica lo cual hace de ellos un universo adecuado para desarrollar diversos conceptos consolidados en la matemática usual. En este contexto también se presentaron algunas combinaciones clásicas como la doble negación y el tercero excluido, las cuales no se cumplen en todos los topos de prehaces.

Por último, en este trabajo se dejan bastantes problemas sin resolver y una cantidad amplia de temáticas por analizar, las cuales puedan brindar un desarrollo más amplio. Queda en el aire, por ejemplo, la búsqueda de un conjunto completo de conectivos que permitan a partir de ellos encontrar todos los conectivos de cierto topos.

Bibliografía

[1] **Daniel F. Bustos**, *Temas de lógica en topos de Grothendieck*. Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas con énfasis en Estadística). Universidad del Tolima, Ibagué, 2013.

[2] **Xavier Caicedo**, "Lógica de los haces de estructuras". *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **XIX** No. 74 (1995) 569-586.

[3] **Xavier Caicedo**, "Conectivos intuicionistas sobre espacios topológicos". *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* **XXI** No. 81 (1997) 521-534.

[4] **Robert Goldblatt**, *Topoi: The Categorial Analysis of Logic*. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[5] **Peter T. Johnstone**, *Topos Theory*. Academic Press, London, 1977.

[6] **Saunders Mac Lane**, *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics 5. Springer-Verlag, New York, 1971.

[7] **Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk**, *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[8] **Colin McLarty**, *Elementary Categories, Elementary Toposes*. Clarendon Press, Oxford, 1992.

[9] **Arnold Oostra**, "Conectivos en el topos de grafos dirigidos". *Boletín de Matemáticas* **III** (1996) 55-62.

[10] **Arnold Oostra**, *Conectivos en topos*. Tesis (Maestría en Matemáticas). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1997.

[11] **Arnold Oostra**, *Álgebras de Heyting*. Decimocuarto Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[12] **Arnold Oostra**, "Introducción a la teoría de topos". En: *Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2005. pp. 351-396.

[13] **Eliana Rodríguez**, *Charles Sanders Peirce y los conectivos completos*. Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas con énfasis en Estadística). Universidad del Tolima, Ibagué, 2008.

	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS	Página **1** de **3**
Universidad del Tolima	AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

GERMÁN ANDRÉS GALEANO ORTIZ	con C.C N°	1.110.492.328
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar [X]

No Autorizar [ ] **Motivo**: ______________________________

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	X	Artículo		Proyecto de Investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del

Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 "…*Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro"*. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

Título completo: **Conectivos en los topos de prehaces.**

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ____________________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ____________________

- Artículo publicado en revista: ____________________

- Capítulo publicado en libro: ____________________

- Conferencia a la que se presentó: ____________________

Universidad del Tolima	**PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS** **AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL**	Página **3** de **3**
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **09** Mes: **Febrero** Año: **2018**

Autores: Firma

Nombre:	GERMÁN ANDRÉS GALEANO ORTIZ		C.C.	1.110.492.328
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.